

Секция: «Алгебра и Теория Чисел».

Dense sphere packings: state of the art and algebraic geometry constructions

Цфасман Михаил Анатольевич

Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН,

Независимый Московский университет,

Université Versailles St-Quentin -Laboratoire de Mathématiques

How dense can we pack equal spheres in the Euclidean space \mathbb{R}^N ? The question looks natural and is treated by humanity at least since the end of 16th century. The first four hundred years of research gave us the answers only in dimensions 1, 2, and 3. Quite recently, the answers for $N = 8$ and $N = 24$ – that we always presumed to be true – were proved by an elegant technique using modular forms [1], [2].

If we restrict ourselves to the easier situation when the centers of the spheres form a lattice (an additive subgroup of \mathbb{R}^N) the answer is known for N from 1 to 8, and, of course, for $N = 24$. Not too much either. . .

We have to ask easier questions. Can we bound the density and how? Which constructions give us packings that, if not being the best, are however dense enough? Number fields and curves over finite fields provide lovely constructions [3]. To find out their densities we need to know a lot about our algebraic geometry objects. In particular, we study their zeta-functions.

As usual, when we do not know the answer for a given N we try to look at what happens when $N \rightarrow \infty$. This time we need to understand the asymptotic behaviour of zeta-functions when the genus tends to ∞ , cf. [4], [5], [6], [7].

My dream is a nice theory of limit objects such as projective limits of curves or infinite extensions of \mathbb{Q} , as yet we are very far from it.

Another great challenge is to construct lattice sphere packings that are denser than those given by a random construction (so-called Minkowski bound).

References

- [1] M. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8, *Annals of Math.* **185** (2017), 991–1015.
- [2] J. Oesterlé, Densité maximale des empilements de sphères en dimensions 8 et 24, *Sém. Bourbaki* **69**:1133 (juin 2017).
- [3] M. Rosenbloom, M. Tsfasman, Multiplicative lattices in global fields, *Invent. Math.* **101**:1 (1990), 687–696.
- [4] M. Tsfasman, Some remarks on the asymptotic number of points, *Coding theory and algebraic geometry*, Springer LN 1518 (1991), 178–192.
- [5] M. Tsfasman, S. Vladuts, In finite global fields and the generalized Brauer–Siegel Theorem, *Moscow Math. J.* **2**:2 (2002), 329–402.
- [6] M. Tsfasman, Serre’s theorem and measures corresponding to abelian varieties over finite fields, *Contemporary Math.*, to appear.

- [7] J.-P. Serre, Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius, Sém. Bourbaki **70**:1146 (mars 2018).

О нулях Зигеля

Калмынин Александр Борисович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Нулями Зигеля называются вещественные нули L -функций вещественных характеров Дирихле, лежащие (в некотором количественном смысле) слишком близко к единице. Теоремы о свойствах таких «исключительных» нулей являются основным источником неэффективности в теоретико-числовых результатах и играют важную роль в таких вопросах, как распределение простых чисел в арифметических прогрессиях и проблема десятого дискриминанта. В своем докладе я дам обзор классических и современных фактов о нулях Зигеля и их применений в задачах теории чисел.

К категорификации проекции из аффинной алгебры Гекке типа A в конечную

Толмачев Константин

Massachusetts Institute of Technology

Работы Безрукавникова по геометрическому соответствию Ленглендса и работы Горского, Негуца, Расмуссена, и Обломкова, Розанского по гомотопиям узлов указывают на существование категорной версии некоторого естественного гомоморфизма из аффинной алгебры Гекке типа A в конечную. В частности, этот гомоморфизм переводит генераторы решетки внутри аффинной алгебры в элементы Юциса-Мёрфи. Я расскажу о частичных результатах в направлении его категорификации, в контексте известных геометрических категорификаций алгебр Гекке. Некоторые из этих результатов получены совместно с Р. Безрукавниковым.

Представления группы Галуа \mathbb{Q} и p -адические модулярные формы

Петров Александр

Harvard University

Делинь и Шимура сопоставили модулярной форме, собственной относительно операторов Гекке, двумерное представление группы Галуа поля рациональных чисел $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$. Если вместо обычных модулярных форм использовать p -адические (на уровне q -разложений, p -адическая модулярная форма это просто формальный ряд с p -адическими коэффициентами, который по модулю любой степени p сравним с q -разложением какой-то обычной модулярной формы) то можно получить очень много новых представлений группы Галуа. Я расскажу об этих конструкциях и о том, как с помощью них можно гипотетически попытаться описать все представления группы Галуа.

Арифметика обобщенных чисел Каталана

Кубрак Дмитрий
Massachusetts Institute of Technology

Я расскажу о проекте которым занимался со школьником Джэйсоном Ченом в рамках программы Primes в MIT в прошлом году. В этом проекте мы изучали некоторые арифметические свойства так называемых обобщенных чисел Каталана. Это естественное обобщение обычных чисел Каталана имеет как параметр последовательность целых (или необязательно) чисел, и считает число путей Дика с некоторыми естественным образом определяемыми весами (зависящими от этой последовательности чисел). Доклад будет элементарным и не требующим практически никаких знаний.

Уловимая монодромия

Окуньков Андрей Юрьевич
Columbia University,

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Монодромию линейных дифференциальных и разностных уравнений можно рассматривать как широкое обобщения экспоненциального отображения для группы Ли и изучать абстрактно в рамках различных версий соответствия Римана-Гильберта. Однако для некоторых очень специальных уравнений возникающих в вычислительной геометрии, теории представлений, и математической физике, монодромию можно описать "явно" в некоторых алгебраических и геометрических терминах. Я объясню некоторые стороны этого феномена, следуя совместным работам с Р. Безрукавниковым и М. Аганагич.

Секция: «День Арнольда».

Инварианты графов и дельта-матроидов

Ландо Сергей Константинович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Доклад посвящен исследованиям, выполнявшимся на факультете математики НИУ ВШЭ в последние годы. В этих исследованиях, помимо докладчика, принимали участие студенты бакалавриата и магистратуры — сотрудники Научно-учебной лаборатории *Комбинаторика инвариантов Васильева* и участники одноименного семинара.

Около 1990 г. В. А. Васильев, в будущем профессор факультета математики НИУ ВШЭ, ввел ныне широко используемое понятие инварианта конечного порядка узлов. Он также предложил описывать эти инварианты в терминах хордовых диаграмм, которые можно интерпретировать как ленточные графы с одной вершиной. Такой диаграмме можно сопоставить абстрактный граф — ее граф пересечения, что позволяет строить инварианты узлов из инвариантов графов.

Задача исследования состояла в поиске адекватного комбинаторного аналога графа пересечения для случая ленточных графов с произвольным числом вершин (в терминах таких ленточных графов описываются инварианты конечного порядка зацеплений с произвольным числом компонент). Оказалось, что в качестве такого аналога естественным образом могут выступать бинарные дельта-матроиды, введенные А. Буше около 1980 г. Среди полученных в направлении исследования этой связи результатов:

- построение различных алгебр Хопфа бинарных дельта-матроидов, а также соотношений в этих алгебрах Хопфа, выделяющих инварианты конечного порядка (В. И. Жуков и С. К. Ландо);
- установление тождественности части построенных алгебр Хопфа с предложенными несколько ранее с той же целью В. А. Клепцыным и Е. Ю. Смирновым алгебрами Хопфа лагранжевых подпространств (В. И. Жуков);
- построение нетривиальных и неожиданных продолжений некоторых инвариантов графов, порождающих инварианты конечного порядка узлов, до инвариантов бинарных дельта-матроидов, порождающих инварианты конечного порядка зацеплений (М. С. Дудина, А. М. Дунайкин, В. И. Жуков).

Список литературы

- [1] S. K. Lando, V. I. Zhukov *Delta-matroids and Vassiliev invariants*, Moscow Mathematical Journal, vol. 17(4), 741–755 (2017).
- [2] В. И. Жуков *Лагранжевы подпространства, дельта-матроиды и 4-членные соотношения*, Функц. анализ и прил. (2018)

Косы, комплексификация, квантовая гравитация или: Что лишает сна теоретических физиков?

Некрасов Никита Александрович
Stony Brook University

В.И. Арнольд любил комплексифицировать математические понятия, задачи и их решения. Например, комплексификацией группы из двух элементов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ оказывается группа \mathbb{Z} , комплексификацией тетраэдра октаэдр, а комплексификацией октаэдра икосаэдр. Еще В.И. Арнольд любил говорить, что преимущество математиков над физиками в том, что у последних уже написан Главный Лагранжиан, который описывает всю наблюдаемую Вселенную, в то время как у математиков задачи возникают всегда и везде, и их Вселенная неисчерпаема. Я попробую рассказать, в чем заключаются нерешенные задачи теоретиков, какая математика при этом возникает, и как комплексификация и группы кос связаны с квантованием гравитации в разных размерностях.

Ветвящиеся объемы и волны

Васильев Виктор Анатольевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Я расскажу о приложениях теории монодромии в интегральной геометрии и теории уравнений в частных производных. В частности, будет рассказано про многомерное обобщение Леммы XXVIII Ньютона (объемы, отсекаемые гиперплоскостями от ограниченной области с гладкой границей в \mathbb{R}^{2k} никогда не определяют алгебраическую функцию на пространстве гиперплоскостей), обсуждена аналогия этой задачи с теорией лагун гиперболических УрЧП (связывающей возможность общаться посредством звука с четномерностью пространства), и предъявлена новая (в дополнение к принадлежащему Архимеду примеру нечетномерных шаров) серия областей в \mathbb{R}^n , для которых функция отсекаемого объема локально алгебраична вблизи некоторых плоскостей, пересекающих эти области.

Марковские процессы на бесконечномерном симплексе

Коротких Сергей

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Мой доклад посвящён семейству бесконечномерных марковских процессов, которое впервые возникло в работе Ethier и Kurtz 1981 года в связи с математическими задачами генетики, а позднее было обобщено в работах Петрова, Бородина и Ольшанского. Я расскажу немного о марковских процессах и их генераторах, затем опишу генераторы для процессов Ethier-Kurtz и объясню, какую информацию можно извлечь из знания генераторов.

Секция: «Анализ и Динамические Системы».

Что такое бесконечномерный некоммутативный гармонический анализ?

Ольшанский Григорий Иосифович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН

Классический гармонический анализ основан на разложении функций в ряд Фурье на окружности или в интеграл Фурье на прямой. Предметом некоммутативного гармонического анализа является (грубо говоря) разложение пространства функций на однородном пространстве (к примеру, на сфере) на минимальные подпространства, инвариантные относительно группы движений. Некоммутативность группы движений резко смещает акценты, и возникающая наука (это один из основных разделов теории представлений) сильно отличается от классического анализа. Я расскажу о том, что происходит в бесконечной размерности. Поначалу кажется, что ничего сделать нельзя ввиду очевидных препятствий. Тем не менее, при правильном подходе теорию построить можно, и она приводит к множеству новых эффектов.

Pervolation crossings and complex analysis

Смирнов Станислав Константинович

Сколтех,

Université de Genève,

Санкт-Петербургский государственный университет

We will present a much shorter and more conceptual proof of the Cardy-Carleson formula (for the scaling limit of the triangular lattice critical percolation crossing probabilities). This is joint work with Mikhail Khrisoforov.

Решение многомерной задачи Монжа-Канторовича

Гладков Никита

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Какая из функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $f(x) + f(y) + f(z) \leq xyz$, обладает наибольшим интегралом? Треугольник поделили на n^2 треугольничков правильным образом и поместили в каждый треугольничек положительное число. Оказалось, что суммы чисел в линиях каждого направления образуют одну и ту же геометрическую прогрессию. Каков её знаменатель? При чём в этих двух задачах константа $8.577356792\dots$? Почему план перевозки булочек напоминает тетраэдр Серпинского?

Global bifurcations on the two sphere (les dessins des autres enfants.)

Ильяшенко Юлий Сергеевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
Независимый Московский университет

This talk manifests the first steps of a new born branch of the bifurcation theory: global bifurcations on the two sphere. It appeared that there exist structurally unstable generic families of vector fields in the plane. In all the previous works on the planar bifurcations, the result was described by a finite number of phase portraits that may occur under the perturbations of degenerate vector fields. In the global theory, this is no more the case. Even three-parameter families of vector fields on the two sphere may have numeric invariants, and six-parameter families may have functional invariants. No versal families exist any more. A continual set of germs of generic bifurcation diagrams may occur even in the four-parameter families. A natural question arises: given a degenerate vector field, how to determine, what part of its phase portrait actually bifurcates? How to classify bifurcations in the low (one and two)-parameter families, where numeric invariants are not expected? All these questions, except for the classification of the two-parameter families, are answered by the speaker and his collaborators: Nataliya Goncharuk, Dmitry Filimonov, Yury Kudryashov, Nikita Solodovnikov, Ilya Schurov and others. Some open problems will be stated. All the necessary definitions will be given during the talk.

Непрерывные селекции и некоторые задачи линейной алгебры

Семенов Павел Владимирович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

В этом кратком докладе будет рассказано о приложениях теории непрерывных селекций многозначных отображений при ответе на следующий вопрос. Всегда ли можно выбрать решения $x \in A$ и $y \in B$ линейного уравнения $L(x, y) = z$ непрерывно зависящими от z , где A и B - фиксированные выпуклые компакты? Этот вопрос - весьма частный случай общей задачи о расщеплении многозначных отображений. Положительные ответы имеются или в небольших размерностях, или при "хорошем" расположении ядра $\text{Ker}(L)$ относительно A и B . Отрицательные ответы имеются в размерности три и выше.

Higher determinants and the matrix-tree theorem

Бурман Юрий Михайлович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

For a $n \times n$ -matrix $A = (a_{ij})$ and a number $k \geq n$ we define a degree k polynomial $Det_{n,k}(A)$ of the matrix elements called higher determinant of the matrix. In particular, $Det_{n,k}(A)$ is the usual determinant; and also all $Det_{n,k}$ exhibit some properties of the determinant, like row/column expansion.

The classical matrix-tree theorem (Kirchhoff, 1847) relates the principal minor of the $n \times n$ Laplace matrix (any matrix with row sums 0) to a particular sum of monomials of matrix elements indexed by trees with n vertices. We present an analog of the matrix-tree theorem involving the higher determinant in the left-hand side.

Секция: «Алгебраическая Геометрия».

Real-normalized differentials: degenerations and applications

Кричевер Игорь Моисеевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
Сколтех,
Columbia University

In the talk a new analytical approach to the study of differentials, vector bundles... on families of curves degenerating to a stable singular curve will be presented. As an application of this approach we will describe a proper compactification of the moduli space of the real-normalized differential, and new upper bound on the dimension of complete cycles in the moduli space of algebraic curves of compact type.

Around Liouville's first theorem

Хованский Аскольд Георгиевич

University of Toronto

According to Liouville's first theorem an integral of an elementary function is usually not an elementary function. In the talk I will discuss the statement and a proof of this result. Differential Galois group of the extension obtained by adjoining an integral does not determine if the integral is an elementary function or not. Nevertheless Liouville's first theorem can be proved using differential Galois groups. The first step towards such proof was suggested by Abel. This step is related to algebraic extensions and their Galois groups. A significant part of the talk is dedicated to the second step which deals with pure transcendent extensions and with connected Lie groups. The idea of the proof goes back to J. Liouville and J. Ritt.

Треугольники Шарыгина

Нетай Игорь Витальевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

В докладе я планирую рассказать об известной планиметрической задаче описания треугольников Шарыгина. Эта задача начинается как задача классической планиметрии, однако её продолжение приводит к современной сложной науке, такой как задача описания рациональных точек на эллиптической кривой. Задача описания целочисленных треугольников Шарыгина решена на евклидовой плоскости, хотя и там некоторые интересные вопросы пока остаются без ответа. Также я планирую рассказать о том, что получается в задаче описания треугольников Шарыгина на плоскости Лобачевского.

О вопросах конечности гиперкэлеровых многообразий

Курносков Никон Михайлович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Гиперкэлеровы многообразия один из примеров многообразий со специальной голономией, естественно возникающий в разных областях математики и физике. Компактных примеров таких многообразий известно лишь несколько деформационных типов. В докладе я планирую обзорно рассказать об известных подходах к вопросам конечности числа деформационных типов, включая лагранжевы расслоения, форму Бовилля-Богомолова-Фуджика и ограничения на числа Бетти.

Секция: «О Преподавании Математики».

Новые возможности и подходы в преподавании математики на основе обучающей системы 01Математика

Зайцев Алексей Иванович
СЕО «01математика онлайн»,
гимназия Сколково,
СколТех

От историков до журналистов: как математику выжить в реальном мире и кого-то чему-то научить

Щуров Илья Валерьевич
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Секция: «Бизнес и Индустрия: Рассказы Выпускников».

Что делать после матфака? Бизнес или наёмный труд?

Сердюков Алексей
CEO «DouDouGames»,
основатель «ЯТакЕм»

Контрастные последствия после матфака

Ионов Евгений
ПАО «Вымпелком»

Хакерство как ремесло и наука

Гениев Омар
Deteact

Правда о рынке криптовалют

Гаркуша Александр
Соучредитель и совладелец «ModernToken»