

Для $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im} \tau > 0$, полагая $q = q(\tau) = e^{i\pi\tau}$ определим θ -функцию

$$\theta_1(z) = \theta_1(z|\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{(m-\frac{1}{2})^2} e^{(m-\frac{1}{2})2\pi iz},$$

и функции (параметры τ и $k = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)}$ как правило не указываются.)

$$\begin{aligned} \theta_2(z) &= \theta_1(z + 1/2) & \text{sn } z &= \text{sn}(z, k) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{\theta_3^2(0)}\right)}{\theta_4\left(\frac{z}{\theta_3^2(0)}\right)} \\ \theta_3(z) &= q^{1/4} e^{\pi iz} \theta_1(z + 1/2 + \tau/2) & \text{cn } z &= \text{cn}(z, k) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{\theta_3^2(0)}\right)}{\theta_4\left(\frac{z}{\theta_3^2(0)}\right)} \\ \theta_4(z) &= \theta_3(z + 1/2) & \text{dn } z &= \text{dn}(z, k) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \frac{\theta_3\left(\frac{z}{\theta_3^2(0)}\right)}{\theta_4\left(\frac{z}{\theta_3^2(0)}\right)} \end{aligned}$$

1. Покажите что функции $\text{sn } z, \text{cn } z, \text{dn } z$ эллиптические и найдите их периоды.

2. Покажите что

$$\text{sn}^2 \left(z \sqrt{\wp\left(\frac{1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\tau}{2}\right)}, \sqrt{\frac{\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right) - \wp\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\wp\left(\frac{1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\tau}{2}\right)}} \right) = \frac{\wp\left(\frac{1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\wp(z) - \wp\left(\frac{\tau}{2}\right)}$$

и найдите аналогичные соотношения для функций $\text{cn } z, \text{dn } z$.

3. Покажите что

$$\begin{aligned} \text{sn}^2 z + \text{cn}^2 z &= 1 \\ k^2 \text{sn}^2 z + \text{dn}^2 z &= 1 \end{aligned}$$

4. Докажите соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d \text{sn } z}{dz} &= \text{cn } z \text{dn } z \\ \frac{d \text{cn } z}{dz} &= -\text{sn } z \text{dn } z \\ \frac{d \text{dn } z}{dz} &= -k^2 \text{sn } z \text{cn } z \end{aligned}$$

Для вещественного параметра $k \in (0, 1)$ определим функцию

$$u_k(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

и константы $K = u_k(1)$ и $K' = u_{\sqrt{1-k^2}}(1)$.

5. Покажите что $\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}} = K'$.

6. Найдите образ верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ при отображении $u_k(z)$.

7. Покажите что $u_k(\text{sn}(z, k)) = z$,

8. Найдите автономные дифференциальные уравнения первого порядка и задачи Коши решениями которых являются $\text{sn}(z, k), \text{cn}(z, k), \text{dn}(z, k)$.