

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА 2018  
ЛИСТОК 2

1. Покажите, что если функция Гамильтона системы с двумя степенями свободы имеет вид

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p_1^2 q_1^4 + p_2^2 q_1^2 - 2\alpha q_1)$$

с постоянной  $\alpha$ , то для некоторых постоянных  $A, B, C$  выполняется

$$q_1 = A \cos q_2 + B \sin q_2 + C.$$

2. Для частицы в кулоновском поле  $U(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}$  определим вектор

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{M} - \alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Проверьте что  $\vec{A}$  интеграл движения и вычислите скобки  $\{A_i, M_j\}, \{A_i, A_j\}$ .

3. Покажите что каноническое преобразование с производящей функцией  $F(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \varepsilon(q_1 q_2 + P_1 P_2)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  соответствует повороту в фазовом пространстве.

4. Покажите, что если  $(p, q) \mapsto (P, Q)$  преобразование эволюции системы с функцией Гамильтона  $H$  за время  $t$ , то для достаточно гладкой функции  $f(x, y)$  выполняется

$$f(P, Q) = f(p, q) + t \{f(p, q), H\} + \frac{t^2}{2!} \left\{ \{f(p, q), H\}, H \right\} + \dots$$

5. Покажите что при

$$a = \frac{m\omega q + ip}{2m\omega} e^{i\omega t}$$

переменные  $Q = a$  и  $P = i \bar{a}$  являются канонически сопряжёнными. Выразите через них функцию Гамильтона гармонического осциллятора

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

и найдите производящую функция  $F(q, Q)$  канонического преобразования  $(q, p) \mapsto (Q, P)$

6. Покажите, что система трёх частиц на прямой взаимодействующих по закону  $\frac{g^2}{(x_i - x_j)^2}$  имеет интеграл движения

$$I = m\dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{x}_3 - \frac{g^2 \dot{x}_1}{(x_2 - x_3)^2} - \frac{g^2 \dot{x}_2}{(x_3 - x_1)^2} - \frac{g^2 \dot{x}_3}{(x_1 - x_2)^2}$$

7. Используя уравнение Гамильтона-Якоби покажите, что в двумерии траектория частицы, движение которой задаётся функцией Гамильтона

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \frac{p^2 + 2}{q^2}$$

является коническим сечением в плоскости  $Oq_1q_2$ .