Материалы к семинарам по гладким многообразиям
(29.10.2018–03.11.2018)

Задача 3.1. Докажите, что

а) эквивалентность путей не меняется при замене карты (U, ϕ) на другую карту того же гладкого атласа и при замене гладкого атласа на эквивалентный;

б) структура векторного пространства на классах эквивалентности путей не зависит от выбора карты.

Задача 3.2. Пусть Φ – отображение, которое переводит класс эквивалентности v путей в оператор дифференцирования в точке, $v \mapsto X_v$, $X_v(f) = \dfrac{d}{dt} f(\gamma(t))(0)$, где γ – путь, являющийся представителем класса v. Докажите, что Φ определено корректно, и что оно является изоморфизмом векторных пространств (пространства классов эквивалентности путей в точке и пространства операторов дифференцирования в точке).

Задача 3.3.

а) Опишите в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство T_pS^2 к сфере $S^2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ в точке $p = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

б) Пусть $v \in T_pS^2$ – касательный вектор из пространства из предыдущего пункта, причем в базисе, индуцируемом картой, соответствующей стереографической проекции из северного полюса, он имеет координаты $(1, 1)$. Какие координаты он имеет в базисе, индуцируемом картой, соответствующей стереографической проекции из южного полюса?

в) Пусть $f : S^2 \to \mathbb{R}$ – функция, получаемая ограничением функции z на сферу. Найдите $v(f)$, где v – вектор из предыдущего пункта, а под применением его к функции понимается применение к ней соответствующего оператора дифференцирования в точке.

Задача 3.4. Пусть $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ – естественная проекция. Покажите, что существует естественный изоморфизм векторных пространств T_pS^2 и $T_{\pi(p)}\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ для каждой точки $p \in S^2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Задача 3.5. Рассмотрим пути

$$\alpha(t) = \pi(\cos t, \sin t, 0), \tag{1}$$
$$\beta(t) = \pi(-\cos t, 0, \sin t), \tag{2}$$
$$\gamma(t) = \pi(1, t, t) \tag{3}$$

на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (где π – естественная проекция из $\mathbb{R}^3$). При $t = 0$ они проходят через одну точку. Найдите линейную зависимость между их классами эквивалентности в этой точке.