

Материалы к семинарам по гладким многообразиям (05.11.2018–09.11.2018)

Задача 5.1. Покажите, что на объединении всех касательных пространств (*касательном расслоении*) к данному многообразию имеется структура гладкого многообразия, индуцируемая естественным образом с исходного многообразия. Покажите, что естественное отображение проекции гладкое.

Задача 5.2. Дайте определение коммутатора векторных полей (сечений касательного расслоения) в терминах классов эквивалентности путей и докажите, что оно эквивалентно определению через операторы дифференцирования.

Задача 5.3. Выразите координатные векторные поля для сферических координат $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ через координатные векторные поля для декартовых координат $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Задача 5.4. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ для следующих пар векторных полей:

а) $X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ на \mathbb{R}^2 в декартовых координатах;

б) $X = r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta}, Y = r^2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta}$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ в сферических координатах.