Алгебраическая геометрия 3

2018

1 Докажите, что в нетеровом кольце нильрадикал нильпотентен (то есть $Nil(A)^k = 0$ для некоторого k), а любой идеал содержит некоторую степень своего радикала.

2 Приведите пример такого кольца A, что топологическое пространство $Spec(A)$ нетерово, а кольцо A нет.

3 Пусть X – топологическое пространство. Докажите эквивалентность следующих условий: (а) X нетерово; (б) любое открытое подпространство в X квазикомпактно; (в) любое подпространство X квазикомпактно.

4 Докажите теорему Гильберта о базисе: если A – нетерово кольцо, то кольцо многочленов $A[X]$ тоже нетерово.

(Указание: сначала докажите следующий факт. Пусть $I \subset A[X]$ – идеал, а $K \subset A$ – идеал, порожденный старшими коэффициентами всех многочленов из I. Пусть $a_1, \dots, a_k$ порождают K, F_i – многочлен со старшим коэффициентом a_i и I' – идеал, порожденный $F_1, \dots, F_k$. Тогда для любого многочлена $F \in I$ верно, что $F \equiv F' \pmod{I'}$, где $deg(F') < max(deg(F_i))$.)

5 Докажите, что если A нетерово, то кольцо формальных степенных рядов $A[[X]]$ тоже нетерово (можно рассуждать как в предыдущей задаче, используя “младшие” коэффициенты степенных рядов вместо старших).

6 Является ли нетеровым подкольцо $R \subset \mathbf{C}[[z]]$, состоящее из рядов с ненулевым радиусом сходимости?

7 Приведите пример подкольца в $\mathbf{C}[x, y]$, не являющегося нетеровым.

8 Пусть M нетеров A-модуль, а $u : M \to M$ гомоморфизм. Докажите, что если u сюръективен, то u изоморфизм. (Указание: рассмотреть последовательность $Ker(u^i)$).

9 Пусть M – A-модуль. Простой идеал $\mathfrak{p}$ называется ассоциированным с M, если существует такой $x \in M$, что $\mathfrak{p} = Ann(x)$ ($Ann(x)$ – это $\{f \in A | fx = 0\}$, аннулятор x). Что можно сказать о подмодуле M, порожденном x? Покажите, что если A нетерово, то любой ненулевой A-модуль имеет ассоциированные простые идеалы. (Указание: рассмотреть семейство идеалов, являющихся аннуляторами элементов M.)

10 Пусть M – ненулевой нетеров модуль над нетеровым кольцом. Покажите, что существует последовательность подмодулей $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k = 0$, такая, что фактормодули M_i/M_{i+1} изоморфны $A/\mathfrak{p}_i$ для некоторых простых $\mathfrak{p}_i$.