Алгебраическая геометрия 4

2018

1 (теорема о подъеме) Пусть B цело над A, $I_1 \subset I_2 \subset A$ простые идеалы, а J_1 такой простой идеал в B, что $J_1 \cap A = I_1$ (он существует по теореме из лекций, на которую можно ссылаться!). Докажите, что существует такой простой идеал $J_2 \subset B$, что $J_2 \cap A = I_2$ и $J_1 \subset J_2$.

2 Пусть $\phi : A \to B$ целый гомоморфизм колец (т.е. B цело над A). Покажите, что индуцированное отображение из $Spec(B)$ в $Spec(A)$ замкнуто (т.е. переводит замкнутые множества в замкнутые). Приведите пример незамкнутого отображения спектров, соответствующего гомоморфизму колец.

3 Пусть B цело над A и $f : A \to K$ гомоморфизм в алгебраически замкнутое поле K. Покажите, что f продолжается до гомоморфизма из B в K.

4 Пусть K алгебраически замкнутое поле и L – поле, содержащее K. Докажите, что если некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в K имеет решение в L, то она имеет решение и в K.

5 ("трюк Рабиновича") Пусть K алгебраически замкнутое поле, I идеал в $K[X_1, \dots, X_n]$, а $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ такой многочлен, что он обращается в нуль в любой точке $x \in K^n$, где все $G \in I$ обращаются в нуль. Покажите, что идеал в $K[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$, порожденный I и $FX_{n+1} - 1$, совпадает со всем кольцом.

6 В условиях предыдущей задачи покажите, что кольцо частных $(K[X_1, \dots, X_n]/I)_F$ нулевое. Выведите из этого, что $F^N \in I$ для некоторого N.

7 Докажите, что $\mathbf{Q}$ не является конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгеброй. Используя лемму Нетер, докажите, что и вообще никакое поле нулевой характеристики не может быть конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгеброй.

8 Пусть I максимальный идеал в конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгебре A. Докажите, что A/I – конечное поле.