# Листок 3. Векторные поля и потоки на многообразиях
## Гладкие многообразия
*Крайний срок сдачи 26.11.2018*

26 ноября с 15:30 до 16:50 состоится приём задач!!!

**1.** Покажите, что если кривые $\gamma_1$, $\gamma_2$ эквивалентны в точке $q$ многообразия $M$, а $h$ — диффеоморфизм, то кривые $h\circ\gamma_1$ и $h\circ\gamma_2$ будут эквивалентны в точке $h(q)$. Верно ли обратное?

**2.** Введите структуру гладкого многообразия на $TM$ и $T^*M$.

**3.** Опишите матрицы, составляющие ксательные пространства к матричным единицам многообразий (а) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; (б) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$; (в) $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$; (г) $\mathrm{SU}(n,\mathbb{R})$.

**4.** Найдите образы полей $X = \frac{\partial}{\partial\varphi}$, $Y = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$ при стереографической проекции на плоскость южного полюса: $x + iy = e^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

**5.** На многообразии $M$ с локальными координатами $q^1, \dots, q^n$ для векторных полей $X = X^1(q)\frac{\partial}{\partial q^1} + \dots + X^n(q)\frac{\partial}{\partial q^n}$ и $Y = Y^1(q)\frac{\partial}{\partial q^1} + \dots + Y^n(q)\frac{\partial}{\partial q^n}$ и отображения потока $X_t$ поля $X$ за время $t$ найдите первый порядок по $t$ в разложении в ряд по $t$ поля

$$Y^1(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))^1} + \dots + Y^n(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))^n}.$$

**6.** Пусть $X$, $Y$ — векторные $C^\infty$-поля, определенные в окрестности $p \in M$. Пусть $g_1$ — интегральная кривая $X$, начинающаяся в $p$. Пусть для достаточно малого $\tau$, $g_2$ — интегральная кривая поля $Y$, начинающаяся в $g_1(\tau)$; $g_3$ — интегральная кривая поля $-X$, начинающаяся в $g_2(\tau)$; $g_4$ — интегральная кривая поля $-Y$, начинающаяся в $g_3(\tau)$. Определим кривую $\gamma$ для достаточно малых $\tau$ следующим образом $\gamma(\tau^2) = g_4(\tau)$. Докажите, что

$$[X, Y](p) = \lim_{t\to+0}\dot\gamma(t).$$

**7.** Если $M$ — компактное многообразие, а $X$ — гладкое поле на нём, то действие $X_t$ является полным, то есть для каждой точки $p \in M$ интегральная кривая, проходящая через эту точку, определена на всех $t \in \mathbb{R}$.

**8.** Докажите, что если набор функций $q^1, \dots, q^n$ можно выбрать координатами на области $U \subset M$, то $[\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial q^j}] = 0$.

**9.** Пусть $D$ — бесконечно малый параллелепипед, $V(D)$ — его объём, $X$ — гладкое векторное поле с преобразованием потока $\varphi_t$, то

$$V\big(\varphi_t(D)\big) = V(D) + V(D)\,\mathrm{div}X\cdot t + o(tV(D)), \quad t \to 0.$$

**10.** Для всяких двух точек $x, y$ связного гладкого многообразия $M$ существует диффеоморфизм $f$ такой, что $f(x) = y$.

**11.** Докажите, что гладкое компактное многообразие с краем $M$ можно так вложить в полупространство $x_N \leqslant 0$ пространства $\mathbb{R}^N$, при достаточно большом $N$, что $\partial M$ будет лежать в гиперплоскости $x_N = 0$.