Клименко Алексей Владимирович

avklimenko@hse.ru

1 Цепные дроби

Цепные дроби — это выражения вида

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

где последовательность (a_n) ($a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{N}$ при $k \geq 1$) может быть конечной и бесконечной. Изучение этой темы начнётся с вопроса о существовании и единственности представлений действительных чисел цепными дробями. Далее возможно несколько вариантов.

1.1 Цепные дроби и наилучшие приближения

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Если бесконечную цепную дробь, представляющую действительное число x, оборвать на каком-то месте (такие дроби называются *подходящими*), то такая дробь приближает x лучше, чем любая дробь с меньшим знаменателем. Предлагается доказать несколько вариантов этого утверждения, используя различные — геометрические и динамические — конструкции, где возникают цепные дроби.

1.2 Периодические цепные дроби и квадратичные рациональности

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Если последовательность a_j (пред)периодична, то для соответствующей цепной дроби нетрудно построить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, которому она удовлетворяет, и следовательно, она равна $a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Обратное утверждение также верно, но требует более сложного доказательства. Также предлагается установить, какой вид имеют цепные дроби для чисел вида $\sqrt{b}$, $b \in \mathbb{Q}$.

1.3 Преобразование Гаусса—Кузьмина и его свойства

Тема рассчитана на студентов 2 курса.

Построение цепной дроби для заданного числа связано с динамикой отображения $x \mapsto \{1/x\}$ на единичном отрезке, называемого *отображением Гаусса(—Кузьмина)*. Исследуя свойства этого отображения, можно отвечать на вопросы о том, как устроены цепные дроби «большинства» действительных чисел, например, найти частоту, с которой в последовательности (a_j) для типичного числа встречается число 5.

2 Марковские цепи

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Марковская цепь — это случайный процесс лишь немного более сложный, чем многократное подбрасывание монетки (кубика и т.п.). Именно, вместо одного игрального кубика у нас имеется шесть, по-разному несимметричных: при бросании i-го кубика вероятность, что выпадет j, равна p_{ij}. Если на n-м шаге у нас выпало число x_n, то для построения x_{n+1} подбросим кубик номер x_n. Как будут меняться вероятности того, что $x_n = j$ с ростом n? Сколько (в среднем) раз среди чисел $x_1, \ldots, x_N$ встретится j, если N велико? С этими и подобными вопросами и предлагается разобраться в курсовой работе.

Возможны также различные продолжения, рассчитанные на более подготовленных студентов (в основном 2 курса):

1) марковские цепи со счётным множеством состояний: какие новые эффекты здесь возникают?

1′) случайные блуждания: если двигаться по бесконечному графу, выбирая на каждом шаге равновероятно одно из рёбер, то как себя ведёт такая траектория?

2) марковские цепи с непрерывным временем: формальное построение и новые эффекты.

2′) теория массового обслуживания: уменьшает ли автомат с талончиками среднее время ожидания в очереди?

3) ветвящиеся процессы: как устроено генеалогическое дерево популяции?

3 Символическое кодирование для гиперболических систем

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Как заметил Адамар, динамика отображения $x \mapsto 2x$ на единичном отрезке тесно связана с динамикой следующего *отображения сдвига* σ на пространстве $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: $(\sigma(\omega))_n = \omega_{n+1}$ (достаточно посмотреть на двоичную запись числа). При этом если считать, что ω_n — это независимые подбрасывания монетки, то соответствующая точка отрезка будет распределена равномерно (вероятность попадания на любой подотрезок равна его длине).

Мы рассмотрим более сложный пример — диффеоморфизм двумерного тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, задаваемый формулой $x \mapsto Ax$, где матрица $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ является гиперболической: её собственные значения $\lambda_{1,2}$ не лежат на единичной окружности. В этом случае символической моделью будет марковская цепь.

4 Теорема Данжуа

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Теорема Данжуа — редкий пример утверждения, в котором C^1- и C^2-гладкие отображения ведут себя по-разному. Именно, рассмотрим сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Для таких отображений Пуанкаре построил инвариант сопряжения, называемый *числом вращения*: оно одинаково для отображений f и $h \circ f \circ h^{-1}$, где h — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Предположим, что число вращения иррационально. Верно ли, что в этом случае отображение сопряжено повороту на постоянный угол $x \mapsto x+\gamma$? Как показал Данжуа, это верно, если f является C^2-гладким, но, вообще говоря, неверно для C^1-гладких f.

Далее этот сюжет может продолжиться рассмотрением аналога теоремы Данжуа для группы коммутирующих отображений, а также вопросом о возможных числах вращения для композиции отображений с данными числами вращения.

5 Производная Пеано

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Как известно, если функция на прямой имеет n производных, в каждой точке справедливо разложение Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n) \text{ при } h \to 0.$$

Можно ли это равенство принять за определение производных? Именно, назовём *производными Пеано* функции $a_k(x)$, для которых имеет место разложение

$$f(x+h) = a_0(x) + \frac{a_1}{1!}h + \frac{a_2(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{a_n(x)}{n!}h^n + o(h^n) \text{ при } h \to 0.$$

Наличие «обычной» производной $f^{(n)}(x)$ тогда гарантирует существование производных Пеано $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, причём $a_k(x)$ будет совпадать с $f^{(k)}(x)$. Напротив, из существования производных Пеано не следует существования обычных производных (кроме первой). Предлагается разобрать соответствующие контрпримеры, а также доказать, что при определённых условиях (например, непрерывности функций $a_k(x)$) существование производных Пеано всё-таки влечёт существование производных.