

ГЛУЦЮК АЛЕКСЕЙ АНТОНОВИЧ¹

aglutsyu@ens-lyon.fr

Темы курсовых и дипломных работ

1 Вокруг гипотезы В.Я.Иврия о бильярдах

В 1978 г. В.Я.Иврий сформулировал гипотезу, утверждающую, что во всяком бильярде с (криволинейной) гладкой границей в евклидовом пространстве множество периодических орбит имеет меру нуль. Или, что то же самое, множество периодических пар (точка, направление) имеет меру нуль. Он показал, [10], что из этой гипотезы следует гипотеза Германа Вейля (1911 г. [13]) об асимптотике распределения собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа. Гипотеза Иврия решена лишь в очень частных случаях, например, для треугольных орбит в любой размерности (М.Рыхлик, Л.Стоянов, Я.Б.Воробец и др.) и четырехугольных орбит в размерности два [7] (см. там же более полный обзор и библиографию). Главный частный случай гипотезы Иврия относится к бильярдам с кусочно-аналитической границей. Для них она эквивалентна утверждению о том, что множество периодических орбит каждого периода имеет пустую внутренность. Гипотеза открыта даже для случая кусочно-алгебраической границы. Она доказана для полиэдральных бильярдов (напр. многоугольников на плоскости) и кусочно-гладких бильярдов с "вогнутыми стенками" (Д.Г.Васильев).

Гипотеза Иврия имеет аналог в теории невидимости. Рассмотрим идеально отражающее (не обязательно связное) тело с кусочно-гладкой границей в евклидовом пространстве и ориентированные прямые, идущие к телу из бесконечности. Тело называется *невидимым в направлении* заданной ориентированной прямой L , если прямая отражается от тела конечное число раз и уходит на бесконечность в исходном направлении, в точности вдоль прямой L и с той же ориентацией.

А.Ю.Плахов высказал гипотезу [11, гипотеза 8.2], утверждающую, что никакое тело не является невидимым по множеству направлений, имеющему положительную меру Лебега. Для кусочно-аналитического случая гипотеза Плахова, как и гипотеза Иврия, эквивалентна утверждению о том, что множество направлений невидимости с данным числом отражений имеет пустую внутренность. Обзор по теории невидимости представлен в той же книге, включая результаты о невидимости в конечном числе направлений и по всем направлениям.

Задача 1. Проверить гипотезу Иврия (Плахова) для плоских бильярдов (тел), граница которых есть объединение

- а) гладких коник: эллипсов, гипербол, парабол;
- б) прямых и коник.

Задача 2. Гипотеза С.Л. Табачникова о коммутирующих бильярдах, недавно доказанная А.А.Глуцюком, относится к вложенным строго выпуклым бильярдам с гладкой границей в любой размерности. Каждый из них определяет бильярдное преобразование

¹А.А.Глуцюк планирует быть в ВШЭ во втором семестре, с 1 февраля по 30 апреля 2019 г. А также в первом семестре в течение короткого времени, с 20 ноября по 5 декабря 2018 г. Готов обсуждать предмет курсовой со всеми, кто заинтересуется, как до, так и после приезда в ВШЭ, как лично, так и по e-mail и Skype

пространства ориентированных прямых следующим образом. Отразим данную ориентированную прямую L от границы данного бильярда в последней (в смысле ориентации прямой) точке пересечения прямой L с границей бильярда. Направим отраженную прямую из точки отражения внутрь бильярда. Известно, что если вложенные выпуклые бильярды являются софокусными эллипсоидами, то соответствующие бильярдные преобразования коммутируют. Гипотеза Табачникова (ныне теорема, доказанная в [3, 5]) утверждает, что верно и обратное: *если два выпуклых ограниченных вложенных бильярда коммутируют, то они – софокусные эллипсоиды.*

Доказательство в размерностях не меньше 3 [5] – относительно короткое. Самая существенная часть – доказательство в двумерном случае [3], основанное на методах комплексного анализа, теории аналитических распределений и алгебраической геометрии. Это – результат двух длинных статей [4] и [3].

Было бы интересно получить относительно простое геометрическое доказательство. Например, с помощью изучения коммутирующих бильярдов как коммутирующих преобразований цилиндров, сохраняющих площадь. Возможно, геометрические идеи из статьи Порицкого [12] могли бы быть полезны.

Задача 3 (С.Л.Табачников). Доказать, что всякая компактная область на плоскости с гладкой границей имеет либо 2- либо 3- периодическую бильярдную орбиту (или обе). Это утверждение следует из глубокой теоремы Benci и Giannoni, доказательство которой использует продвинутое симплектическое геометрию. Было бы интересно получить прямое геометрическое доказательство.

Задача 4 (С.Л.Табачников). Известно, что внешний многоугольный бильярд на плоскости имеет периодическую траекторию (результат Кельтера (C.Culter), написанный Табачниковым). **Открытая гипотеза:** *это утверждение верно и для внешних многоугольных бильярдов на плоскости Лобачевского, с учетом периодических траекторий на бесконечности.*

Задача 5 (С.Л.Табачников). Рассмотрим квадратный бильярд в постоянном магнитном поле: все траектории – дуги окружностей. Что можно сказать о динамике? Может ли орбита

- а) уходить на бесконечность?
- б) быть замкнутой?

2 Проблема исключительных минимальных множеств для ростков голоморфных векторных полей

Одна из основных проблем теории голоморфных слоений – это классическая проблема исключительных минимальных множеств, поставленная С.Камачо (C.Camacho), Эта проблема состоит в следующем. Рассмотрим полиномиальное векторное поле в $\mathbb{C}^2$ и его комплексный фазовый портрет: голоморфное слоение на аналитические кривые (комплексные фазовые кривые поля) с особенностями. Оно продолжается до *голоморфного слоения на аналитические кривые* (комплексные листы) с изолированными особенностями в $\mathbb{CP}^2$. И обратно, всякое голоморфное слоение с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ в каждой аффинной карте является фазовым портретом полиномиального векторного поля.

Проблема 6. Верно ли, что всякий лист произвольного голоморфного слоения с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ накапливается хотя бы к одной особой точке?

Определение. *Инвариантным множеством* слоения называется объединение некоторых его листов (оно может содержать особые точки). Замкнутое инвариантное множество называется *минимальным*, если оно не содержит меньших замкнутых инвариантных множеств.

Следующая проблема эквивалентна Проблеме 5.

Проблема 7. Верно ли, что всякое минимальное множество голоморфного слоения с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ содержит особую точку?

Это - открытые проблемы, возраста нескольких десятилетий.

Замечание. В проблемах 6 и 7 важно, что объемлющее многообразие - проективная плоскость. В общем случае, утверждение неверно. Контрпример: тривиальное расслоение прямого произведения двух римановых поверхностей. В этом случае особых точек нет, и каждый слой является минимальным множеством.

Рассматриваемый ниже проект курсовой (дипломной) работы относится к локальной версии вышеупомянутых проблем. Чтобы ее сформулировать, введем следующее определение.

Определение. Рассмотрим росток голоморфного векторного поля v в $\mathbb{C}^n$ с (изолированной) особой точкой в начале координат. Фиксируем окрестность нуля U и рассмотрим комплексный фазовый портрет поля в U : слоение на связные аналитические кривые в U с изолированной особой точкой 0. Определение минимального множества фазового портрета в U аналогично предыдущему, где $U = \mathbb{CP}^2$. А именно, инвариантное множество - это объединение комплексных фазовых кривых в U (оно может содержать особую точку); фазовые кривые могут примыкать к границе области U . Минимальное замкнутое инвариантное множество называется *исключительным*, если оно не содержит особой точки и не является одномерным аналитическим подмножеством в U .

Проблема 8. Верно ли, что ограничение голоморфного векторного поля с изолированной особой точкой на любую достаточно малую окрестность особой точки не имеет исключительных минимальных множеств?

Проблема 8 представляется более доступной, чем проблемы 6 и 7, и тесно связана с уже решенной проблемой существования сепаратрисы в особой точке голоморфного векторного поля. Известно, что сепаратриса, проходящая через особую точку, всегда существует в размерности два [2] и не обязана существовать в высших размерностях [8].

Следующая задача представляется упражнением. В то же время, насколько мне известно, этот результат не опубликован.

Задача 9. Доказать, что проблема 8 имеет положительное решение в размерности два.

После того, как решена задача 9, можно попробовать следующую задачу.

Задача-проблема 10. Рассмотреть примеры Гомес-Монта и Лознги [8] ростков трехмерных голоморфных векторных полей без сепаратрис в особой точке. Исследовать существование исключительных минимальных множеств, т.е. проблему 6 для этих примеров.

Подготовительный материал см. в книге Yu.S.Ilyashenko, S.Yu.Yakovenko [9]. Или в книге В.И.Арнольда "Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений". Или обзор Арнольда и Ильяшенко в книге ВИНТИ "Динамические Системы - 1". Одна из главных теорем подготовительного материала, которые следует изучить - теорема Зайденберга о разрешении особенностей ростков двумерных голоморфных векторных полей последовательностью раздутий. При этом получается новое векторное поле, у которого все особые точки - элементарны.

3 Эффект Джозефсона, динамические системы на торе и дважды конфлюэнтные уравнения Гойна

Рассматривается семейство дифференциальных уравнений на торе, моделирующее эффект Джозефсона из сверхпроводимости. Исследуются зоны фазового захвата: множества уровня числа вращения (имеющего смысл среднего напряжения за длинный интервал времени), имеющие непустую внутренность. Оказывается, что в отличие от классической картины языков Арнольда, в рассматриваемом семействе зоны захвата существуют только для целых значений чисел вращения (замечено и доказано В.М.Бухштабером, О.В.Карповым и С.И.Тертычным и чуть позднее доказано Ю.С.Ильяшенко). Известно, что каждая зона захвата является бесконечной цепочкой областей на плоскости, разделенных перемычками и уходящими на бесконечность, границы областей имеют Бесселеву асимптотику (замечено физиками С.Шапиро, А.Янусом и С.Холли (1964 г.) и недавно доказано А.В.Клименко и О.Л.Ромаскевич). Рассматриваемое семейство уравнений на торе эквивалентно семейству голоморфных линейных дифференциальных уравнений второго порядка на сфере Римана: биконфлюэнтных уравнений Гойна.

Предлагаемые темы курсовых и дипломных работ относятся к серии открытых вопросов о геометрии зон захвата. Некоторые геометрические результаты получены комплексными методами, с помощью сведения к семейству линейных комплексных дифференциальных уравнений второго порядка: дважды конфлюэнтных уравнений Гойна. Имеются важные открытые гипотезы о линейных уравнениях, тесно связанные с геометрией зон захвата.

Обзор по вышеописанной тематике доступен в [1, 6]

Список литературы

- [1] Buchstaber, V.M.; Glutsyuk, A.A. On monodromy eigenfunctions of Heun equations and boundaries of phase-lock areas in a model of overdamped Josephson effect. Preprint <https://arxiv.org/abs/1609.00244> Статья вышла в Трудах МИАН, 297 (2017), 62–104.
- [2] Camacho, C.; Sad, P. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. - Ann. Math. 115 (1982), 579–595.
- [3] Glutsyuk, A. On 4-reflective complex analytic planar billiards. - J. Geom. Anal., **27** (2017), 183–238.

- [4] Glutsyuk, A. *On quadrilateral orbits in complex algebraic planar billiards*. Moscow Math. J. **14**(2) (2014), 239–289.
- [5] Glutsyuk, A. *On commuting billiards in higher dimensions*. Preprint <https://arxiv.org/abs/1807.10567>
- [6] Glutsyuk, A. *On Constrictions of Phase-Lock Areas in Model of Overdamped Josephson Effect and Transition Matrix of the Double-Confluent Heun Equation* Journal of Dynamical and Control Systems: <https://doi.org/10.1007/s10883-018-9411-1> Also available as a preprint: <https://arxiv.org/abs/1805.02624>
- [7] Glutsyuk, A.A.; Kudryashov, Yu.G., *No planar billiard possesses an open set of quadrilateral trajectories*, J. Modern Dynamics, **6** (2012), No. 3, 287–326.
- [8] Gomez-Mont, X.; Luengo, I. *Germes of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^3$ without a separatrix*. - Invent. Math. 109 (1992), 211–219.
- [9] Ilyashenko, Yu.S.; Yakovenko, S.Yu. *Lectures on analytic differential equations*. - Graduate Studies in Mathematics 86, AMS, Providence, RI 2008.
- [10] Ivrii, V.Ya., *The second term of the spectral asymptotics for a laplace-beltrami operator on manifolds with boundary*, Func. Anal. Appl. **14** (2) (1980), 98–106.
- [11] Plakhov, A. *Exterior billiards. Systems with impacts outside bounded domains*, Springer, New York, 2012.
- [12] Poritsky, H. *The billiard ball problem on a table with a convex boundary – an illustrative dynamical problem*. Ann. of Math. (2), **51** (1950), 446–470.
- [13] Weyl, H., *Über die asymptotische verteilung der eigenwerte*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1911), 110–117.