**ЛИСТОК 6**

**Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ 2018**

Основное поле на всякий случай предполагается алгебраически замкнутым нулевой характеристики.

Можно пользоваться тем, что нормализация аффинного многообразия существует, то есть что существует конечный бирациональный морфизм (последнее означает, что поля рациональных функций совпадают) из нормального аффинного многообразия в данное.

**Задача 1** *Покажите, что через 3 попарно не пересекающиеся прямые в* $\mathbb{P}^3$ *проходит единственная квадрика. Сколько прямых пересекает 4 попарно не пересекающиеся прямые в* $\mathbb{P}^3$*?*

**Задача 2** *Опишите все прямые на кубической поверхности в* $\mathbb{P}^3$*, заданной в аффинной карте уравнением* $xyz = 1$.

**Задача 3** *Пучок прямых в* $\mathbb{P}^3$ *– это одномерное семейство прямых в* $\mathbb{P}^3$*, параметризованное прямой* $\mathbb{P}^1$ *на квадрике Плюккера (грассманиане (2,4)). Покажите, что для любого пучка прямых существует такая точка* $O$ *и плоскость* $P$ *в* $\mathbb{P}^3$*, что прямые пучка - это в точности прямые, лежащие в* $P$ *и проходящие через* $O$.

**Задача 4** *Опишите поверхность в* $\mathbb{P}^3$*, заметаемую касательными прямыми к скрученной кубике.*

**Задача 5** *Докажите, что любое многообразие содержит открытое аффинное нормальное многообразие.*

**Задача 6** *Рассмотрим морфизм из аффинной прямой на нодальную кубику* $y^2 = x^2(x-1)$. *Найдите минимальный многочлен для какой-нибудь функции, разделяющей точки прообраза над точкой* $(0,0)$. *Что плохого происходит при редукции его коэффициентов по модулю максимального идеала точки* $(0,0)$*?*

**Задача 7** *Рассмотрим отображение из* $\mathbb{A}^2$ *в* $\mathbb{A}^4$*, заданного формулой*

$$(x, y) \to (x, xy, y(y-1), y^2(y-1)).$$

*Найдите систему уравнений, определяющую образ. Покажите, что это конечный морфизм, докажите, что образ замкнут. Покажите, что это бирациональный морфизм. Исследуйте количество прообразов над каждой точкой. На каком множестве это изоморфизм?*

**Задача 8** *Докажите нормальность квадратичного конуса по следующей схеме. Пусть* $A = k[x_1, \dots, x_k, z]/(z^2 - f)$*, где* $f$*-многочлен от* $x_1, \dots, x_k$*,* $k \geq 2$*, свободный от квадратов. Покажите, что* $A$ *целозамкнуто в своем поле частных. Для этого напишите минимальный многочлен для* $g + h\sqrt{f}$ *(не забудьте показать, что любой элемент поля частных* $A$ *представим в таком виде), где* $g, h$ *рациональные функции от* $x_1, \dots, x_k$*. Что можно сказать о* $g, h$*, если все коэффициенты многочлена целые?*

**Задача 9** *Покажите, что если рациональная функция на нормальном многообразии определена везде, кроме множества коразмерности 2, то это регулярная функция.*

**Задача 10** *Вычислите размерность семейства* $k$*-мерных подпространств на* $n$*-мерной неособой квадрике.*

**Задача 11** *Докажите, что нетерова локальная область целостности размерности 1 регулярна тогда и только тогда, когда она целозамкнута. Как еще называются такие кольца и что это говорит об алгебраических кривых?*

**Задача 12** *Пусть* $X, Y$ *- многообразия над* $k$ *(вариант: схемы над* $S$*,* $X$ *целостная, а* $Y$ *конечного типа),* $x \in X$ *точка (как схемы, т.е. не обязательно замкнутая). Покажите, что морфизм из* $Spec \mathcal{O}_{X,x}$ *в* $Y$ *продолжается до морфизма из некоторой окрестности* $x$ *в* $Y$*.*

**Задача 13** *Покажите, что если два морфизма из приведенного многообразия в отделимое совпадают на плотном открытом подмножестве, то они совпадают.*

**Задача 14** *a) Используя теорему о примитивном элементе, докажите, что любое многообразие бирационально эквивалентно гиперповерхности. Выведите отсюда, что на любом многообразии есть неособые точки, и они образуют плотное открытое подмножество.*

*b) В характеристике нуль докажите обращение теоремы о примитивном элементе по следующей схеме. Покажите что если* $X \subset \mathbb{P}^m$ *и* $\dim X < n - 1$*, то проекция из достаточно общей точки то есть лежащей вне некоторого замкнутого подмножества в* $\mathbb{P}^m$ *(в частности, не лежащей в* $X$*) является конечным и бирациональным. Далее спроектировав нужное число раз* $X$ *из точки сведите случай к гиперповерхности и докажите теорему о примитивном элементе с помощью последней проекции.*

**Задача 15** *Доказать, что если гиперповерхность степени 3 имеет две особые точки, то соединяющая их прямая лежит на этой гиперповерхности. Что можно сказать о плоских кривых степени 3 с тремя особыми точками?*

**Задача 16** *Доказать, что если гиперповерхность в* $\mathbb{P}^n$ *содержит линейное подпространство размерности* $\geq n/2$*, то она имеет особые точки.*