Лекция 10 - 18. Некоторые важные меры

1 Напоминание: общая теорема о продолжении меры.

Рассмотрим произвольное пространство E. Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ подмножеств множества E, называемых элементарными. Пусть этот класс – конечная σ-алгебра, содержащая E, называемая также кольцом с единицей. Пусть на $\mathcal{E}$ определена мера m, обладающая следующими свойствами:

$$m(\sqcup_1^N A_n) = \Sigma m(A_n), \tag{1}$$

$$m(A \subset \cup A_n) \leq \Sigma m(A_n). \tag{2}$$

Свойство(2) называется полуаддитивностью.

Определение 1 *Внешняя мера $\mu^*(X)$ определяется так:*

$$\mu^*(X) = \inf_{\cup A_n \supset X, A_n \in \varepsilon} \Sigma m(A_n).$$

Определение 2 *Множество измеримо, если $\forall \varepsilon \exists A \in \varepsilon : \mu^*(X \bigtriangleup A) < \varepsilon$. Положим:*

$$\mu(X) = \mu^*(X) \tag{3}$$

Теорема 1 *(о продолжении меры) Пусть ε – алгебра множеств, и m – мера на ней, обладающая свойствами* (1) *и* (2)*. Тогда определение 2 задает σ-аддитивную меру на множестве всех измеримых множеств.*

Резюме в лекции 3 показывает, что эта теорема уже доказана на лекциях 2 и 3 для любой алгебры элементарных множеств с определенной на ней длиной, удовлетворяющей свойству полуаддитивности на алгебре $\mathcal{E}_\sigma$ и требованию

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Последнее требование немедленно следует из формулы (1). Ниже проверяется только свойство (2) – полуаддитивность длины.

2 Мера Стилтьеса

Требование (2) для меры Стилтьеса доказывается аналогично тому, как это делается для меры Лебега (на ТК требуются подробности; вопрос будет со *).

3 Мера на квадрате $K = E_1 \times E_2,\ E_1 = E_2 = [0,1]$.

Элементарные множества – прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, с естественной мерой и их конечные объединения с мерой, определенной по формуле (1). Чтобы воспользоваться предыдущей теоремой, нужно доказать полуаддитивность этой меры. Это – общий факт, изложенный ниже.

4 Прямое произведение мер

Пусть $E_j,\ j = 1, 2$ – "объемлющее" пространство, $\mathcal{E}_j$ – совокупность элементарных подмножеств $E_j,\ m_j : \mathcal{E}_j \to \mathbb{R}^+$ – полуаддитивная мера на $\mathcal{E}_j$. Положим:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \{A \times B | A \in \mathcal{E}_1,\ B \in \mathcal{E}_2\};\ m(A \times B) = m_1(A_1) \times m_2(B). \tag{4}$$

$\mathcal{E}$ – множество конечных объединений множеств из $\mathcal{E}_0$; m определено на $\mathcal{E}$ с помощью (4).

Теорема 2 *Так определенная мера полуаддитивна. Следовательно, предыдущее определение корректно.*

Эта теорема будет доказана на следующей лекции для квадратов на плоскости и на лекции 13 в общем случае. Перейдем к определению интеграла по мере.

5 Интеграл.

Интеграл по произвольной мере определяется точно так же, как интеграл по мере Лебега.

Следующие определения и теоремы почти дословно повторяют соответствующие места из теории интеграла Лебега.

Задача 1 *Дайте подробные формулировки и доказательства. В теоретической контрольной эти вопросы будут со* $*$.

Определение измеримых функций.

Определение конечных простых функций.

Лемма о равномерном приближении ограниченных измеримых функций конечными простыми.

Определение интеграла от ограниченных измеримых функций.

Теорема об интегрирукмости ограниченных измеримых функций.

Определение суммируемых функций и интеграла от них.
Теорема Егорова.
А как насчет теоремы Лузина?
Теорема об ограниченной сходимости.
Теорема о мажорируемой сходимости.