Материалы к семинарам по матанализу (третий семестр)

12-я — 13-я недели (23.11.2018–07.12.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 12–13. Абстрактная теория меры

1. Произведение мер. Теорема Фубини.
2. Заряды. Разложение Хана и Жордана.
3. Абсолютная непрерывность. Теорема Радона–Никодима. Теорема о разложении меры.

Примерные задачи семинаров

Пусть (E_1, Σ_1) и (E_2, Σ_2) — измеримые пространства, где Σ_1 и Σ_2 — σ-алгебры в E_1 и E_2, соотвественно, и пусть $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ — σ-алгебра в $E_1 \times E_2$, порожденная множествами вида $B_1 \times B_2$, где $B_1 \in \Sigma_1$ и $B_2 \in \Sigma_2$ (то есть это минимальная σ-алгебра, содержащая все такие подмножества). Определим для подмножеств $B \subset E_1 \times E_2$ сечения $B_x = \{y \in E_2 : (x, y) \in B\}$ и $B^y = \{x \in E_1 : (x, y) \in B\}$.

Задача 6.1. Пусть $B \subset E_1 \times E_2$. Докажите, что если $B \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, то $B_x \in \Sigma_2$ для всех $x \in E_1$ и $B^y \in \Sigma_1$ для всех $y \in E_2$.

Через $\mathcal{L}([0, 1])$ обозначена σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$.

Задача 6.2. Пусть A — неизмеримое по Лебегу множество в $E_1 = [0, 1]$. Покажите, что множество $\{0\} \times A$ из квадрата $[0, 1]^2$ не лежит в $\mathcal{L}([0, 1]) \otimes \mathcal{L}([0, 1])$. Но оно лежит в $\mathcal{L}([0, 1]^2)$ и имеет нулевую двумерную меру Лебега. Этот пример показывает, что произведение полных измеримых пространств может быть неполным.

Напомним, что *разложение Хана* для заряда μ на множестве X — это представление множества X в виде

$$X = X_+ \sqcup X_-,$$

в котором $\mu \geqslant 0$ на X_+ и $\mu \leqslant 0$ на X_-. В следующих ниже задачах, для замкнутого подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, через λ_X обозначена мера $\chi_X \lambda$, где χ_X — характеристическая функция множества X, а λ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Если μ_1, μ_2 — меры на пространствах X_1, X_2, то $\mu_1 \times \mu_2$ обозначает их произведение. (Это мера на пространстве $X_1 \times X_2$). Через δ_a мы обозначаем δ-меру на $\mathbb{R}$, сосредоточенную в точке $a \in \mathbb{R}$ (по определению, $\delta_a(A) = 1$ если $a \in A$ и $= 0$, если $a \notin A$).

Задача 6.3. Найдите разложение Хана для следующих зарядов:
а) заряд $2\delta_0 - \lambda_{[-1,1]} + a\lambda_{[0,2]}$ на отрезке $[-1, 2] \subset \mathbb{R}$; здесь $a \in \mathbb{R}$;
б) заряд $\delta_0 - x\lambda_{[-1,1]} + (x - 1)\lambda_{[0,2]}$ на отрезке $[-1, 2] \subset \mathbb{R}$; здесь x — координата на $\mathbb{R}$;
в) заряд $y(\delta_0 \times \lambda_{[-1,1]}) - x(\lambda_{[0,1]} \times \delta_0) + \delta_0 \times \delta_0$ на квадрате $[-1, 1]^2$ с координатами x, y;
г) заряд $\delta_0 \times \lambda_{[-1,1]} - 2\lambda_{[-1,1]} \times \delta_0 + \lambda_{\{y \geqslant 0\}} - \lambda_{\{x \geqslant 0\}}$ на квадрате $[-1, 1]^2$ с координатами x, y.

Задача 6.4. Докажите абсолютную непрерывность и найдите производную Радона–Никодима для:
а) заряда из пункта 6.3а) относительно меры $\lambda_{[-1,2]} + \delta_0$;
б) заряда из пункта 6.3б) относительно той же меры;
в) заряда из пункта 6.3в) относительно меры $\lambda_{[-1,1]^2} + \delta_0 \times \lambda_{[-1,1]} + \lambda_{[-1,1]} \times \delta_0 + \delta_0 \times \delta_0$;
г) заряда из пункта 6.3г) относительно той же меры.

Задача 6.5. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — конечное или счётное семейство мер на одном и том же пространстве. Постройте такую меру ν на том же пространстве, что каждая мера μ_i абсолютно непрерывна относительно ν.

Разложением Жордана заряда μ на множестве X называется представление заряда μ в виде разности $\mu_+ - \mu_-$ двух взаимно ортогональных (взаимно сингулярных) мер на X. Напомним, что меры μ_1 и μ_2 называются взаимно ортогональными (взаимно сингулярными), если существует множество A, для которого $\mu_1(A) = 0$ и $\mu_2(CA) = 0$.

Задача 6.6. Пусть $\mu = \mu_+ - \mu_-$ — разложение Жордана некоторого ненулевого заряда. Могут ли меры μ_+ и μ_- иметь совпадающие носители? Строго обоснуйте ответ.

Задача 6.7. Найдите разложения Жордана для зарядов из задачи 6.3.

Задача 6.8. Интегрируемы ли по Лебегу следующие функции на квадрате $[-1,1]^2$:
а) $f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x-y}\right)$? б) $f(x,y) = \frac{1}{(x-y)\ln|x-y|}$?

Задача 6.9. а) Существует ли тело вращения, у которого площадь продольного сечения (проходящего через ось) конечна, а объем бесконечен?
б) Существует ли тело вращения, у которого объём конечен, а площадь продольного сечения (проходящего через ось) бесконечна?

Задача 6.10. Вычислите площадь под графиком функции Кантора (канторовой лестницы).

Задача 6.11. Пусть $K\colon [0,1] \to [0,1]$ — функция Кантора. Конечна ли площадь под графиком функции:
а) 2^{-K}; б) 3^{-K}?
в*) При каких $\lambda > 0$ площадь под графиком функции λ^{-K} конечна?

Задача 6.12. При любых $a \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, найдите площадь фигуры в $\mathbb{C}$, заметаемой образами отрезка $[a,1]$ при умножении на $e^{\lambda t}$, $t > 0$.

Задача 6.13. При каких значениях $s > 0$ следующие функции интегрируемы на квадрате $[-1,1]^2$:
а) $f(x,y) = \frac{1}{|x-y|^s}$; б) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-s}$; в) $f(x,y) = \left|y - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|^{-s}$;
г)* $f(x,y) = \operatorname{dist}\left((x,y), \left\{y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\right)^{-s}$, где dist — расстояние до множества?

Задача 6.14. Докажите, что для двойного интеграла

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

существуют оба повторных интеграла, но их величины не совпадают.

Задача 6.15. Приведите пример двойного интеграла, для которого оба повторных интеграла существуют и равны, а сам двойной интеграл не существует.

Задача 6.16. Пусть $\lambda = \lambda(x)$ — мера Лебега, и $\nu = \nu(x)$ — считающая мера: $\nu(A)$ есть число элементов в $A \subset [0,1]$ (мы полагаем $\nu(A) = +\infty$, если A бесконечно). Обозначим через D диагональ в $[0,1]^2$. Докажите, что

$$\int_0^1 \nu(y) \int_0^1 \chi_D(x,y)\lambda(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \lambda(x) \int_0^1 \chi_D(x,y)\nu(y) = 1$$

(в частности, оба повторных интеграла существуют). Почему утверждение теоремы Фубини не выполняется для этого примера?

Задача 6.17. Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^3$. Найдите образ меры λ_B:
а) при ортогональной проекции на плоскость $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$;
б) при ортогональной проекции на прямую $\mathbb{R} \times \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Задача 6.18. Верно ли, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ является носителем некоторой меры?

Задача 6.19. Пусть мера μ на $\mathbb{R} \times S^1$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Докажите, что образ меры μ при проекции на $\mathbb{R}$ тоже является мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Найдите производную Радона—Никодима этой меры относительно меры Лебега.