Семинар 11.

Задача 1. Пусть аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ вложено как гиперплоскость в аффинное пространство $\mathbb{A}^{n+1}$, $O \in \mathbb{A}^{n+1}$ - произвольная точка, не лежащая в $\mathbb{A}^n$, и $P_0, ..., P_n$ - точки в $\mathbb{A}^n$ такие, что векторы $\overrightarrow{OP_0}$,..., $\overrightarrow{OP_n}$ образуют базис ассоциированного с $\mathbb{A}^{n+1}$ векторного пространства.
а) Проверьте, что точки $P_0, ..., P_n$ образуют аффинный репер в $\mathbb{A}^n$.
б) Докажите, что точка $X \in \mathbb{A}^{n+1}$ лежит в $\mathbb{A}^n$ тогда и только тогда, когда верно равенство:

$$\overrightarrow{OX} = \lambda_0\overrightarrow{OP_0} + ... + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}, \quad \text{где} \quad \lambda_0 + ... + \lambda_n = 1. \qquad (*)$$

в) Покажите, что $\lambda_0, ..., \lambda_n$ в (*) не зависят от выбора точки O, то есть определяются только репером $P_0, ..., P_n$. (Они называются *барицентрическими координатами точки* $X \in \mathbb{A}^n$ *в репере* $P_0, ..., P_n$.)

Задача 2. В условиях задачи 1 выразите барицентрические координаты $\lambda_0, ..., \lambda_n$ точки X через ориентированные объемы параллелепипедов с вершинами в подходящих точках из множества $\{X, P_0, ..., P_n\}$. (Ответ: $\lambda_i = (-1)^i Vol(\overrightarrow{XP_0}, ..., \overrightarrow{XP_{i-1}}, \overrightarrow{XP_{i+1}}, ..., \overrightarrow{XP_n})/Vol(\overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}), \quad i = 0, ..., n.$)

Задача 3. Пусть f - аффинное преобразование плоскости $\mathbb{A}^2$ и существует прямая l в $\mathbb{A}^2$ такая, что прямые l и $f(l)$ непараллельны. Докажите, что: а) множество $n = \{m \cap f(m) \mid m$ - прямая, параллельная $l\}$ является прямой; б) если f имеет неподвижные точки, то они лежат на прямой n.

Задача 4. Аффинный репер (O, e_1, e_2) в евклидовой плоскости E^2 называется *декартовой прямоугольной системой координат*, если (e_1, e_2) - ортонормированный базис евклидова векторного пространства V, ассоциированного с E^2. *Окружностью радиуса* $R > 0$ *с центром* S *в* E^2 называется множество $\omega = \{X \in E^2 \mid$ расстояние между точками X и S равно $R\}$. Докажите, что: а) в декартовой прямоугольной системе координат окружность ω имеет уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где (x_0, y_0) - координаты центра S окружности ω; б) всякое нетождественное аффинное преобразование E^2 является либо поворотом с центром S, либо симметрией с осью, проходящей через S.

Задача 5. *Эллипсом* в евклидовой плоскости E^2 назовем аффинный образ окружности. Докажите, что: а) существует аффинная система координат в E^2, в которой уравнение эллипса имеет вид $\{(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1\}$ для некоторых вещественных чисел x_0, y_0 и $a, b > 0$; б) эллипс с этим уравнением имеет центр симметрии (x_0, y_0); в) середины отрезков $[AB]$ параллельных хорд AB эллипса Ω, где $A, B \in \Omega$, лежат на прямой, проходящей через центр эллипса.

Задача 6. *Кривой степени два* (или *коникой*) в $\mathbb{A}^2$ называется множество $C \subset \mathbb{A}^2$ с уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,^{1} \quad \text{где не все из коэффициентов } a, b, c \text{ равны } 0, \qquad (**)$$

в некоторой аффинной системе координат. а) Докажите, что если коника C в E^2 - эллипс, то $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$. б) Достаточно ли это условие для того, чтобы коника C была эллипсом?

Задача 7. Какие из коник $C_1 = \{x^2 - 3xy + 2y^2 + 7x - 5 = 0\}$, $C_2 = \{2x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 4y + 1 = 0\}$, $C_3 = \{3x^2 - 6xy + 4y^2 + 6x - 8y + 15 = 0\}$ в E^2 являются эллипсами?

Задача 8. *Гиперболой* в E^2 называется аффинный образ коники с уравнением $xy = 1$. Докажите, что: а) существует аффинная система координат в E^2, в которой уравнение гиперболы имеет вид $\{(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = 1\}$ для некоторых вещественных чисел x_0, y_0 и $a, b > 0$; б) если коника C в E^2 - гипербола, то коэффициенты a, b, c ее уравнения (**) удовлетворяют условию $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} < 0$.
в) Достаточно ли это условие для того, чтобы коника C была гиперболой?

Задача 9. Какие из коник $C_1 = \{x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0\}$, $C_2 = \{x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - y + 1 = 0\}$, $C_3 = \{3x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 13 = 0\}$ в E^2 являются гиперболами? Для тех из них, которые являются гиперболами, найдите координаты их центров симметрии.

Задача 10. *Параболой* в $\mathbb{A}^2$ называется аффинный образ коники с уравнением $y = x^2$. а) Докажите, что если коника C в $\mathbb{A}^2$ является параболой, то коэффициенты a, b, c ее уравнения (**) удовлетворяют условию $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0$. б) Достаточно ли это условие для того, чтобы коника C была параболой? в) Какие из коник $C_1 = \{x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0\}$, $C_2 = \{x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 3y - 1 = 0\}$, $C_3 = \{9x^2 - 6xy + y^2 - 5 = 0\}$ в E^2 являются параболами?

---

[1] В этой и последующих задачах полагаем $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, где $\mathrm{char}\,\mathbf{k} \neq 2$.