

ЛИСТОК 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ
ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ
Крайний срок сдачи 21.12.2018

1. Найдите значения значений дифференциальных форм ω на указанных векторах:

а) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов ξ_1, ξ_2 ;

б) $\omega = df$, где $f = x^1 + 2x^2 + \dots + nx^n$, $\xi = (1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$.

2. Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 линейно независимые вектора пространства V . Могут ли существовать $\xi_1, \xi_2 \in V$ такие, что

а) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 = \xi_1 \wedge \xi_2$?

б) $v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4 + v_4 \wedge v_1 = \xi_1 \wedge \xi_2$?

3. Пусть X, Y — векторные поля, ω — 1-форма. Докажите соотношение:

$$d\omega(X, Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) + \omega([X, Y]).$$

4. Вычислите интегралы:

(а) $\oint_L -x^2 y dx + x y^2 dy$, где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в \mathbb{R}^2 , пробегаемая в положительном направлении;

(б) $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ для любого контура L . Как ответ соотносится с формулой Стокса?

5. Покажите, что гладкая k -мерная поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда на ней существует нигде не вырождающаяся k -форма.

6. (а) Докажите, что на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ существует и единственна с точностью до множителя 2-форма, инвариантная относительно группы $SO(3)$. (б) Выпишите эту форму явно в координатах φ, ψ (широта и долгота). (в) Найдите все $SO(3)$ -инвариантные 2-формы на \mathbb{R}^3 . Проверьте, что при ограничении на S^2 получаются формы, описанные в пункте (б).

7. Покажите, что всякая матричная подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$ сохраняющая некоторый фиксированный тензор является подмногообразием.

8. Докажите, что если $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что $H^k(M) = H^k(M_1) \oplus H^k(M_2)$.

9. Найдите когомологии де Рама плоскости без начала координат $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

10. Найдите когомологии де Рама двумерного тора \mathbb{T}^2 .