Лекция 13-18. Теорема Фубини для неограниченных множеств и функций. Заряды

1 Теорема Фубини для неограниченных множеств

Теорема 1 *Пусть* $E_2 = \sqcup F_n$, $\mu_2(F_n) = 1$ $\mu_1(_1) = 1$, *и пусть* $X \subset E_1 \times E_2$ *имеет конечную меру* μ. *Тогда справедлива теорема 1 прошлой лекции.*

Доказательство Заменим E_2 на $\sqcup_1^N F_n$, воспользуемся предыдущей теоремой и перейдем к пределу.

Более подробно, пусть

$$X_N = X \cap \sqcup_1^N F_n,$$
$$f_N(x) = \mu_2(X_{Nx}).$$

Тогда по предыдущей теореме

$$\mu(X_N) = \int_{E_1} f_N(x) d\mu_{1x} \tag{1}$$

Отметим, что последовательность f_N монотонно возрастает. С другой стороны,

$$\mu(X_N) \leq \mu(X).$$

Применим сдедующую теорему Леви.

Теорема 2 *Пусть* $f_N : E \to \mathbb{R}$ *- монотонно возрастающая последовательность* μ*-измеримых функций, и все интегралы* $\int f_N d\mu$ *ограничены общей константой* K. *Тогда почти всюду* $f_N \to f$, *функция* f μ*-измерима, и*

$$\lim_{N\to\infty} \int f_N d\mu = \int f d\mu.$$

Эта теорема для меры Лебега была включена в листок 2; для произвольной меры она доказывается аналогично, см. учебник Колмогорова и Фомина.

По теореме Леви, почти всюду

$$f_N(x) \to \mu_2(X_x),$$

и

$$\lim \int_{E_1} f_N(x) d\mu_1 = \int \mu_2(X_x) d\mu_1.$$

Но $\mu(X_N) \to \mu(X)$. Отсюда следует теорема Фубини для неограниченных множеств. $\square$

2 Теорема Фубини для функций

Теорема 3 *Пусть $W \subset E_1 \times E_2$, $f : W \to \mathbb{R}$ – измеримая суммируемая функция. Тогда*

$$\int_W f = \int \left(\int_{W_x} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x). \tag{2}$$

Доказательство Можно считать функцию f неотрицательной. Применим теорему Фубини для множеств к подграфику,

$$X = \{(x, y, t) \in U | t \in [0, f(x, y)]\}, \ U = E_1 \times E_2 \times \mathbb{R}.$$

Пусть $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times l$, где l - мера Лебега на прямой. Докажем, что обе части формулы (2) равны $\mu(X)$.

Воспользуемся представлением

$$U = (E_1 \times E_2) \times \mathbb{R}$$

и применим к X теорему Фубини для множеств. Получим, что

$$\mu(X) = \int_W f,$$

(еще раз доказано следствие 1).

Воспользуемся представлением

$$U = E_1 \times (E_2 \times \mathbb{R}).$$

и снова применим к X теорему Фубини для множеств. Получим, что

$$\mu(X) = \int \left(\int_{W_x} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

□

Мы переходим к теореме Радона - Никодима, которая дает описание важного класса мер, называемых абсолютно непрерывными. Начнем с понятия *заряда.*

3 Определение заряда

Определение 1 *(наивное). Заряд – это мера, которая может принимать отрицательные значения.*

Примеры 1 1. $\delta(0) - \delta(1)$.

2.

$$\Phi(X) = \int_X f(x) d\mu_x, \; f : E \to \mathbb{R} \tag{3}$$

Этот пример является основным для дальнейшего.

Определение 2 *(формальное). Заряд – это произвольная конечная σ-аддитивная функция множества, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств $\mathcal{M}$, называемых измеримыми.*

Заряд отличается от меры тем, что может принимать отрицательные значения.

4 Положительные и отрицательные множества

Определение 3 *Пусть Φ – заряд, заданный на σ-алгебре множеств $\mathcal{M}$, называемых измеримыми. Множество $X \in \mathcal{M}$ называется положительным (отрицательным) для Φ, если для любого подмножества $Y \subset X, \; Y \in \mathcal{M}, \; \Phi(Y) \geq 0$ (соответственно, $\Phi(Y) \leq 0$).*

Лемма 1 *Пусть Φ – заряд, не являющийся мерой. Тогда для него существует отрицательное множество.*

Доказательство Поскольку Φ – не мера, существует множество X такое, что $\Phi(X) < 0$.

Эвристическое доказательство Пусть любое подмножество $Y \subset X$ имеет неположительный заряд Φ. Тогда множество X – отрицательное, то есть искомое.

Пусть существует $Y \subset X : \Phi(Y) \geq 0$. Введем частичное упорядочение в множестве таких подмножеств $Y \subset X$: дизъюнктное объединение двух подмножеств больше каждого из своих слагаемых. Возьмем измеримое множество $Z \subset X : \Phi(Z) \geq 0$, которое является максимальным элементом в этом множестве подмножеств. Оно существует и не совпадает с X. Множество $X \setminus Z$ отрицательно: если нет, то Z не максимально.

Недостаток этого доказательства - максимальный элемент в множестве измеримых множеств не обязательно измерим. Его надо заменить счетным объединением.

Формальное доказательство Пусть существует $Y \subset X : \Phi(Y) \geq 0$. Построим по индукции возрастающую последовательность вложенных множеств Z_n с положительным зарядом. Возьмем минимальное целое положительное k_1 такое, что существует множество Y_1 с зарядом $\Phi(Y_1) \geq \frac{1}{k_1}$. Возьмем любое такое множество и обозначим его Z_1. Продолжим построение множеств Z_n по индукции. Пусть множество Z_{n-1} уже построено. Рассмотрим множество $X \setminus Z_{n-1}$. Если оно отрицательно, процесс обрывается, и лемма доказана. Если оно неотрицательно, возьмем минимальное k_n такое, что существует подмножество $Y_n \subset X \setminus Z_{n-1}$ с зарядом $\Phi(Y_n) \geq \frac{1}{k_n}$. Положим: $Z_n = Z_{n-1} \sqcup Y_n$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда построенный индукционный процесс не обрывается. Положим

$$Z = \sqcup Y_n.$$

Докажем, что множество $X \setminus Z$ отрицательно. Предположим, что это не так. Возьмем множество Y с положительным зарядом и k такое, что $\Phi(Y) \geq \frac{1}{k}$. Заметим, что $\Phi(Y_n) \to 0$ (иначе заряд множества Z был бы бесконечен), поэтому $k_n \to \infty$. Возьмем n так, что $k_n > k + 1$. По построению, множество $X \setminus Z_{n-1}$ не содержит пожмножества с зарядом больше, чем $\frac{1}{k_n}$. Но, по нашему предположению, Y таким множеством является - противоречие. $\square$

Следствие 1 *В условиях леммы 1 каждое множество, заряд которого отрицателен, содержит отрицательное подмножество, заряд которого также отрицателен, а не равен нулю, как допускается определением.*

5 Разложение Хана

Теорема 4 *Для каждого конечного заряда Φ существует разложение*

$$E = X^+ \sqcup X^-,$$

где $X^+(X^-)$ – положительное (отрицательное) множество относительно Φ.

Доказательство Пусть заряд Φ - мера. Тогда положим $E = X^+$. Пусть заряд Φ - не мера. Тогда существует отрицательное подмножество множества E с отрицательным зарядом. Пусть $a_0 = \inf \Phi(X)$; инфимум берется по всем отрицательным множествам заряда Φ. По определению инфимума, существует последовательность отрицательных множеств X_n таких что $\Phi(X_n) < a_0 + \frac{1}{n}$. Возьмем в качестве X^- объединение $\cup X_n$. Тогда $\Phi(X^-) = a_0$, то есть множество X^- имеет минимальный возможный заряд среди всех отрицательных множеств.

Положим: $X^+ = E \setminus X^-$. Множество X^+ – положительное. Действительно, пусть $Y \subset X^+ : \Phi(Y) < 0$. В силу следствия, Y содержит отрицательное множество Z, заряд которого отрицателен. Тогда $X^- \sqcup Z$ - отрицательное множество, причем $\Phi(X^- \sqcup Z) < \Phi(X^-)$. Следовательно, заряд X^- не минимален. Противоречие. $\square$.

Разложение теоремы 1 называется разложением Хана.

Пусть в примере (3)

$$A^+ = \{f > 0\},\ A^0 = \{f = 0\},\ A^- = \{f < 0\}.$$

Тогда разложение Хана для заряда (3) обладает свойствами:

$$X^+ \supset A^+, \; X^- \supset A^-,$$

множество A^0 может быть "произвольным образом поделено" между X^+ и X^-. Это показывет, что разложение Хана, вообще говоря, неоднозначно.