Лекция 12-18. Теорема Фубини для ограниченных множеств

Грубо говоря, теорема Фубини утверждает, что двойной интеграл от измермой функции равен повторному. Мы начнем с аналога этой теоремы для множеств.

Пусть $E = E_1 \times E_2,\ \mu = \mu_1 \times \mu_2,\ X \subset E,\ X_x = X \cap \{x\} \times E_2,\ \mu_j(E_j) = 1.$

Теорема 1 *Пусть X и X_x – те же, что и выше. Тогда множество X_x μ_2-измеримо почти всюду в смысле меры μ_1, и функция $E_1 \to \mathbb{R}^+ :\ \ x \mapsto \mu_2(X_x)$, продолженная нулем всюду, где она не определена, является μ_1-измеримой. Кроме того:*

$$\mu(X) = \int_{E_1} \mu_2(X_x) d\mu_{1x} \tag{1}$$

Доказательство **Шаг 1.** Пусть X – элементарное множество. Тогда X – дизъюнктное объединение “прямоугольников”. Для каждого из них формула (1) следует из определения площади прямоугольника как “произведения основания на высоту”.

Шаг 2. Пусть X – счетное объединение элементарных множеств. Его можно считать дизъюнктным. Формула (1) для X получается из предыдущего утверждения предельным переходом. Предельный переход обоснован с помощью теоремы Леви (см. записи лекций и аналогичное рассуждение в тексте лекции 13).

Шаг 3. Пусть X – произвольное μ-измеримое множество. Фиксируем ε и приблизим X элементарным множеством A с точностью до ε^2:

$$\mu^*(X \bigtriangleup A) < \varepsilon^2.$$

Пусть $A_x = A \cap\ (\{x\} \times E_2)$. Формула (1) верна для A, подставленного вместо X:

$$\mu(A) = \int \mu_2(A_x) d\mu_1. \tag{2}$$

Докажем, что “для большинства x множество A_x хорошо приближает X_x”, и что множество X_x тем самым μ_2-измеримо. Для этого рассмотрим множество $U \supset (X \bigtriangleup A)$, являющееся счетным объединением элементарных:

$$\mu(U) < \varepsilon^2.$$

Для него справедлива формула (1):

$$\mu(U) = \int \mu_2(U_x) d\mu_{1x}.$$

По неравенству Чебышева,

$$\mu_1\{x | \mu_2(U) \geq \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Следовательно, для ε – почти всех x, множество A_x приближает множество X_x с точностью до ε. (Будем говорить, что свойство выполняется ε-почти всюду, если оно выполняется на множестве, мера дополнения к которому меньше ε.) Пусть $Y_\varepsilon \subset E_1$ – множество тех x, для которых множество A_x приближает множество X_x с точностью до ε. Мы доказали, что

$$\mu(CY_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Пусть $\tilde{Y}_\varepsilon \subset E_1$ - множество тех x, для котоых существует элементарное множество, которое приближает X_ε с точностью до ε. Тогда, во-первых, $Y_\varepsilon \subset \tilde{Y}_\varepsilon$; во-вторых, семейство множеств $\tilde{Y}^\varepsilon$ убывает при $\varepsilon \searrow 0$. С другой стороны, $\mu_1(CY^\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \searrow 0$. Следовательно, $\mu_1(\tilde{Y}^\varepsilon) = 1$ для любого ε. Отсюда следует, что множество X_x μ_2-измеримо для μ_1 почти всех $x \in E_1$. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Шаг 4 Функция $\mu_2(X_x)$ определена только там, где множество X_x μ_2-измеримо. Продолжим ее нулем на все E_1 и сохраним за ней прежнее обозначение. Рассмотрим множество

$$Y(\varepsilon) = \cap Y_{\varepsilon/2^k}.$$

Тогда

$$\mu(CY(\varepsilon)) < \varepsilon. \tag{3}$$

На множестве $Y(\varepsilon)$ функция $\mu_2(X_x)$ является поточечным пределом функций $x \mapsto \mu_2(A_{\varepsilon/2^k})$ при $k \to \infty$. Тем самым, функция $\mu_2(X_x)$ измерима на $Y(\varepsilon)$. Поскольлу ε произвольно, и в силу (3), функция $\mu_2(X_x)$ измерима почти всюду на E_1. Мы доказали второе утверждение теоремы Фубини.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем, что

$$|\int \mu_2(X_x) d\mu_{1x} - \mu X| < 3\varepsilon. \tag{4}$$

Поскольку ε произвольно, это докажет (1), и тем самым, теорему Фубини.

$$|\int \mu_2(X_x) d\mu_{1x} - \mu X| = |\int \mu_2(X_x) d\mu_{1x} - \int \mu_2(A_x) d\mu_{1x} + \mu(A) - \mu(X)|.$$

Это следует из теоремы Фубини для множества A, см. (2). Но

$$|\mu(A) - \mu(X)| \leq \mu(X \Delta A) < \varepsilon.$$

Далее, на множестве Y_ε, $|\mu_2(X_x) - \mu_2(A_x)| < \varepsilon$. На дополнении к Y_ε, $|\mu_2(X_x) - \mu_2(A_x)| < 1$, а само дополнение имеет меру меньше ε. Отсюда следует (4). Поскольку ε произвольно, это доказывает (1). $\square$