Лекция 14 – 18. Теорема Радона-Никодима.

1 Разложение Жордана

Две меры μ и ν называются ортогональными, если существует множество, на котором первая мера равна нулю (как функция на его измеримых подмножествах), и на дополнении к которому вторая мера равна нулю.

Теорема 1 *Каждый заряд, который не является мерой и не противоположен мере, является разностью двух взаимно ортогональных мер.*

Эта теорема не используется в доказаледьстве теоремы Радона-Никодима, и на лекции доказана не будет.

Доказательство Пусть Φ - заряд из теоремы 1. Возьмем разложение Хана для него:

$$E = X^+ \sqcup X^-.$$

Ограничение Φ на X^+ является мерой:

$$\mu(Y) := (\Phi|_{X^+})(Y) = \Phi(Y \cap X^+).$$

Аналогично, мерой является ограничение $-\Phi$ на X^-

$$\nu(Y) := -\Phi(Y \cap X^-).$$

По построению, меры μ и ν ортогональны, и для любого $Y \in \mathcal{M},\ \Phi(Y) = \mu(Y) - \nu(Y)$.

$\square$

2 Теорема Радона-Никодима.

Определение 1 *Заряд Φ абсолютно непрерывен по мере μ, если Φ и μ определены на одной и той же алгебре множеств, и*

$$\mu(X) = 0 \Rightarrow \Phi(X) = 0.$$

Теорема 2 *Пусть Φ – конечный заряд, абсолютно непрерывный относительно меры μ; алгебра $\mathcal{M}$ измеримых множеств для Φ и μ – общая. Тогда существует μ-суммируемая функция f такая, что $\forall X \in \mathcal{M}$,*

$$\Phi(X) = \int_X f d\mu. \tag{1}$$

Определение 2 *Функция f называется плотностью заряда Φ по мере μ или производной*

$$f = \frac{d\Phi}{d\mu}.$$

3 Охота за плотностью.

Доказательство Эвристическое соображение. Пусть формула (1) верна. Для любого $\nu \in \mathbb{R}$ рассмотрим заряд

$$\Phi_\nu = \Phi - \nu\mu$$

и возьмем соответствующее разложение Хана:

$$E = X_\nu^+ \sqcup X_\nu^-.$$

Тогда

$$f \leq \nu \text{ на } X_\nu^-, \; f \geq \nu \text{ на } X_\nu^+. \tag{2}$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Не предполагая более, что формула (1) верна (нам нужно ее доказать), рассмотрим $\Phi_\nu, X_\nu^+, X_\nu^-$ те же, что и выше. Получим возрастающее по вложению семейство множеств $X_\nu^-,\ \nu \in \mathbb{R}$. Пусть

$$N^- = \cap_{\nu \in Q} X_\nu^-, \; X^* = \cup X_\nu^- \setminus N^-.$$

Множества N^- и X^* измеримы. Наша ближайшая задача - найти функцию $f : X^- \to \mathbb{R}$ так, что выполнено соотношение (1).

4 Поимка плотности.

Искомая функция строится как предел простых. Фиксируем q и построим простую функцию f_q следующим образом. Для любого $p \in \mathbb{Z}$ положим:

$$Z_{\frac{p}{q}} = X^-_{\frac{p}{q}} \setminus X^-_{\frac{p-1}{q}},$$

$$f_q = \frac{p}{q} \text{ на } Z_{\frac{p}{q}}, \; p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что

$$X^* = \bigsqcup_{p \in \mathbb{Z}} Z_{\frac{p}{q}}.$$

Поэтому функция f_q определена на X^*. Положим:

$$q = 2^k, \; g_k = f_{2^k}.$$

Тогда последовательность g_k монотонно убывает и фундаментальна в метрике C. Пусть

$$f = \lim g_k$$

Функция f является искомой.

5 Опознание плотности.

Для каждого подмножества $Y \subset X_\nu^- (Y \supset X_\nu^+)$ справедливо неравенство :

$$\Phi(Y) \le \nu\mu(Y)$$

(соответственно,

$$\Phi(Y) \ge \nu\mu(Y)).$$

Поэтому

$$\Phi(Y \cap Z_{\frac{p}{q}} \in \left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right] \mu(Y \cap Z_{\frac{p}{q}}$$

Следовательно, для $Y \subset X^*$,

$$\Phi(Y) \le \Sigma \frac{p}{q} \mu(Y \cap Z_{\frac{p}{q}}) = \int_{X^*} f_q \chi_Y d\mu.$$

Аналогично,

$$\Phi(Y) \ge \Sigma \frac{p-1}{q} \mu(Y \cap Z_{\frac{p}{q}}) = \int_{X^*} f_q \chi_Y d\mu - \frac{1}{q}\mu(Y).$$

Переходя к пределу по подпоследовательности $g_k = f_{2^k}$, получаем:

$$\Phi(Y) = \int_Y f d\mu.$$

Это и есть соотношение (1).

6 Окончание доказательства.

Создается впечатление, что теорема Радона-Никодима доказана. Однако мы нигде не использовали абсолютной непрерывности заряда Φ. Значит, теорема доказана быть не может. И действительно, равенство (1) доказано при условии $Y \subset X^*$. Осталось рассмотреть дополнение $N = E \setminus X^-$. Положим:

$$N^+ = \cap_{\nu \in Q} X_\nu^+.$$

Любая точка $x \notin N^+$ принадлежит одному из множеств X_ν^-. Поэтому $N = N^+ \cup N^-$.

Лемма 1 *Пусть Φ – конечный заряд, и N^+, N^- – те же, что и выше. Тогда $\mu(N^\pm) = 0$.*

Доказательство По определению множества $\mu(N^+)$

$$\Phi_\nu(N^+) \geq 0 \ \forall \ \nu > 0.$$

Пусть $\mu(N^+) > 0$. Тогда

$$\nu\mu(N^+) \leq \Phi(N^+).$$

Поскольку это неравенство справедливо для любого ν получаем, что $\Phi(N^+) = \infty$, противоречие. Аналогично доказывается, что $\mu(N^-) = 0$. □

Отсюда следует, что $\mu(N) = 0$. В этот момент (и не раньше!) в игру вступает абсолютная непрерывность Φ относительно μ, которая влечет:

$$\Phi(N) = 0.$$

Более того, любое подмножесто множества N имеет нулевую меру μ, а значит, и нулевой заряд Φ. Из этого утверждения, а также из аддитивности меры и заряда, следует, что для любого $X \subset E$

$$\Phi(X) = \Phi(X \cap X^*) = \int_{X \cap X^*} f d\mu = \int_X f d\mu.$$

Это доказывает теорему Радона - Никодима. □

7 Теорема о разложении меры.

В качестве бесплатного приложения получается следующая теорема о разложении меры:

Теорема 3 *Каждая конечная мера λ, заданная на единичном кубе с мерой Лебега μ на нем разлагается в сумму трех мер: абсолютно непрерывной меры α и сингулярной меры σ относительно μ, а также дискретной меры δ:*

$$\lambda = \alpha + \sigma + \delta,$$

причем мера σ не имеет атомов (точек положительной λ-меры).

Доказательство [набросок]. По мере λ строим множество X^- и плотность f на нем, как это сделано выше. Мера λ подмножеств множества X^- выражается той же формулой, что и в теореме Радона-Никодима.

Пусть множество N - то же, что в доказательстве теоремы Радона-Никодима. По-прежнему $\mu(N) = 0$. Но теперь $\lambda(N) \neq 0$. Рассмотрим множество всех точек (атомов), мера λ которых положительна. Ограничение меры λ на это множество - дискретная мера. Обозначим ее δ. Ограничение меры $\sigma = \lambda - \delta$ на N - сингулярная мера без атомов. Окончательно, $\lambda = \alpha + \sigma + \delta$. Это доказывает теорему о разложении меры. □