Лекция 11 - 18. Некоторые важные меры, продолжение

Этот текст содержит больше материала, чем было рассказано на лекции; добавленный раздел отмечен *.

1 Прямое произведение мер Лебега

На прошлой лекции описывалось построение прямого произведения мер. Здесь мы докажем корректность этого построения: установим полуаддитивность длины для счетных объединений элементаных множеств. Начнем с прямого произведения мер Лебега на двух единичных отрезках.

Пусть, как и раньше, $\mathcal{E}$ - множество конечных объединений одномерных промежутков, $\mathcal{E}^2$ множество конечных объединений двумерных промежутков, $\mathcal{E}_\sigma$ и $\mathcal{E}_\sigma^2$ - соответствующие счетные обэединения, m_1 и m “длина” на них.

Лемма 1 *Пусть* $C, C_j \in \mathcal{E}_\sigma,\ C \subset \cup C_j$. *Тогда*

$$m(C) \leq \Sigma m(C_j). \tag{1}$$

Доказательство Утверждения следующего абзаца доказываются так же, как в одномерном случае, и мы опускаем подробности. Без ограничения общности, можно считать, что C - один промежуток (“прямоугольник”). Используя лемму о конечном подпокрытии и модифицируя C_j, можно считать, что каждое множество C_j состоит из одного промежутка, и объединение промежутков C_j конечно. Наконец, уменьшая C_j, можем добиться того, что

$$C = \sqcup C_j,$$

где $C = A \times B,\ C_j = A_j \times B_j$.

Измельчая разбиение C на промежутки C_j (продлжолжая горизонтальные и вертикальные стороны промежутков разбиения) добиваемся того, что каждый промежуток C_j имеет вид $C_j = \sqcup C_{kl},\ C_{kl} = A_k \times B_l$; суммирование ведется по тем k, l, для которых $C_j \cap C_{kl} \neq \emptyset$. При этом,

$$A = \sqcup A_k,\ B = \sqcup B_l.$$

Получаем:

$$\Sigma m(C_j) = \Sigma m(C_{kl}) = \Sigma m(A_k \times B_l),$$

суммирование ведется по всем k, l. Отсюда

$$\Sigma m(C_j) = \Sigma m(A_k) \cdot \Sigma m(B_l) = m(A) \cdot m(B) = m(C).$$

□

Для любого n, n-мерная мера Лебега определяется теперь индукцией по n; полуаддитивность доказывается так же, как и выше.

2 * Прямое произведение мер: общий случай

Пусть теперь $\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2, m_1, m_2, \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_{1\sigma}, \mathcal{E}_{2\sigma}, \mathcal{E}_\sigma$ и m - те же, что в лекции 10. Мы хотим доказать полуаддитивность длины m.

Лемма 2 *Пусть* $C, C_j \in \mathcal{E}_\sigma,\ C \subset \cup C_j$. *Тогда*

$$m(C) \leq \Sigma m(C_j). \tag{2}$$

Доказательство Достаточно доказать, что если

$$C = \sqcup C_j,\ C = A \times B, C_j = A_j \times B_j, A, A_j \in \mathcal{E}_1, B, B_j \in \mathcal{E}_2,$$

то

$$m(C) = \Sigma m(C_j).$$

Эвристическое доказательство. Пусть μ - мера на C (которая еше не определена). Имеем:

$$\Sigma m(C_j) = \Sigma \int \chi_{C_j} d\mu = \int \Sigma \chi_{C_j} d\mu = \int \chi_C d\mu = m(C).$$

Формальное доказательство состоит в том, что мы заменяем кратный интеграл повторным, бесконечную сумму - конечной и обосновываем переход к пределу.

Положим: $D_n = \sqcup_1^n C_j$. Определим функцию $f_n : A \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = m_2(D_n^x = D_n \cap (\{x\} \times B)).$$

Очевидно, $f_n \leq m_2(B)$, и

$$\int_A f_n(x) d\mu_1(x) = m(D_n). \tag{3}$$

Мы применяем здесь “теорему Фубини” для конечного объединения произведений $A_k \times B_l$, для которого она очевидна. Последовательность $f_n(x)$ возрастает и ограничена для каждого x; следовательно, она сходится к $f(x) = m_2(B)$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu_1(x) = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\mu_1(x) = m_2(B) \cdot m_1(A) = m(C).$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} m(D_n) = \Sigma m(C_j).$$

В силу (3), это доказывает лемму. □

Мы можем теперь свободно пользоваться прямыми произведениями мер.

3 Прямой образ меры.

Путсь X - пространство с мерой на μ на σ-алгебре $\mathcal{B}$, и $f : X \to Y$ - эпиморфизм. Пусть $\tilde{\mathcal{B}} - \sigma$-алгебра на Y, и $\mathcal{B} = f^{-1}(\tilde{\mathcal{B}})$. Тогда на $\tilde{\mathcal{B}}$ определена мера $\tilde{\mu}$, обозначаемая также $f_*\mu$:

$$\tilde{\mu}(\tilde{B}) = f_*\mu(\tilde{B}) = \mu(f^{-1}(\tilde{B})).$$

Предложение 1 *Функция множеств $\tilde{\mu}$ счетно-аддитивна на $\tilde{\mathcal{B}}$.*

Доказательство Пусть $\tilde{B} = \sqcup \tilde{B}_j,\ B_j = f^{-1}(\tilde{B}_j)$. Тогда $B_j \cap B_k = \emptyset$, и

$$B := f^{-1}(\tilde{B}) = \sqcup f^{-1}(\tilde{B}_j).$$

Следовательно,

$$f_*\mu(\tilde{B}) = \mu(B) = \Sigma\mu(f^{-1}(\tilde{B}_j)) = \Sigma f_*\mu(\tilde{B}_j).$$

□

4 Мера Бернулли.

Обозначим через Σ_2^+ множество односторонних последовательностей из нулей и кдиниц:

$$\omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n \dots$$

Индекс 2 показывает, что элементы последовательностей принимают два значения, знак + - что последовательности односторонние. Введем на Σ_2^+ меру. Для этого определим элементарные множества как конечные объединения цилиндров; цилиндром в Σ_2^+ называется множество последовательностей, у которых на фиксированных местах стоят фbксированные знаки:

$$C_{k_1 \dots f_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \{\omega | \omega_{k_j} = \alpha_j,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Здесь $k \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \{0, 1\}$. Длина (мера) цилиндра определяется так:

$$m(C_{k_1 \dots f_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}) = 2^{-m}.$$

Дальше мера продолжается на σ-алгебру множеств с помощью обычной процедуры. Полученная мера называется мерой Бернулли.

Чтобы это определение было корректно, нужно доказать полуаддитивность длины на счетных объединениях элементарных множеств. Вместо этого мы докажем, что мера Бернулли - прямой образ меры Лебега при отображении полуинтервала $[0, 1)$ на Σ_2^+. Это отображение каждому числу $x \in [0, 1)$ сопостовляет последовательность знаков его двоичной записи:

$$x = 0.\omega_1\omega_2 \dots \omega_n ... \Rightarrow f(x) = \omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n ...$$

Обозначим через Σ_2^+ множество последовательностей с бесконечным числом нулей; только такие последовательности встречаются в данной записи. Отображение f - биекция $[0,1) \to \Sigma_2^+$.

Второе определение. Мера Бернулли на Σ_2^+ равна $f_*\mu$, где μ - мера Лебега на $[0,1)$. Эта мера продолжается на Σ_2^+, если потребовать, чтобы разность $\Sigma_2^+ \setminus \Sigma_2^*$ имела меру 0. Заметим, что это множество счетно, и имеет меру ноль в смысле первого определения меры Бернулли.

Эквивалентность двух определний доказывается в серии задач, предложенной на занятиях.

Аналогично определяетяс мера Бернулли на пространстве двусторонних последовательностей.