Вопросы и задачи к коллоквиуму по матанализу за третий семестр
(24, 26.12.2018)

На коллоквиуме отвечающий получит три теоретических вопроса из приведенного выше списка и одну задачу из списка ниже. При ответе на теоретический вопрос нужно без подготовки сформулировать соответствующие теоремы и все необходимые определения. Для решения задачи дается 30 минут студентам-«математикам» и 40 минут студентам Совбака. Определения, не упомянутые в программе явно, нужно формулировать там, где они впервые (по нумерации вопросов в списке) необходимы.

Теоретические вопросы

1. Общая лемма Сарда
2. *Функции с простыми нулями и векторные поля с невырожденными особыми точками
3. *Функции с морсовскими критическими точками
4. Аксиомы меры (Лебега). Пример неизмеримого множества на окружности
5. Элементарные множества на прямой. Полуаддитивность длины
6. Внешняя мера и ее полуаддитивность
7. Алгебра измеримых множеств
8. Конечная аддитивность меры Лебега
9. σ-алгебра измеримых множеств
10. Счетная аддитивность меры Лебега
11. Принцип непрерывности
12. d-мерная мера Хаусдорфа и ее зависимость от d
13. Хаусдорфова размерность. Случай множеств положительной меры Лебега
14. Оценка сверху на хаусдорфову размерность канторова совершенного множества
15. Свойства хаусдорфовой размерности при липшицевых и гёльдеровых отображеиях
16. Гёльдеровость функции Кантора и оценка снизу на хаусдорфову размерность канторова совершенного множества
17. Алгебра измеримых функций
18. Сходимость поточечная и почти всюду. Измеримость предельной функции
19. Теорема Егорова
20. Продолжение непрерывной функции с замкнутого множества на отрезок
21. Теорема Лузина
22. Алгебра ограниченных простых функций. Определение интеграла Лебега и его существование для ограниченных измеримых функций
23. Элементарные свойства интеграла Лебега: линейность, аддитивность, абсолютная непрерывность
24. Теорема Лебега об ограниченной сходимости

25. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега для суммируемых функций. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

26. Пространство L_1 и его полнота

27. Пространство L_2 и его полнота

28. Общая теорема о продолжении меры

29. Производящая функция меры на отрезке

30. Интеграл по произвольной мере

31. Мера и интеграл Лебега—Стильтьеса

32. Прямое произведение мер Лебега

33. *Прямое произведение произвольных мер

34. Прямой образ меры

35. *Мера Бернулли

36. Теорема Фубини для ограниченных множеств

37. Теорема Фубини для неограниченных множеств и интегралов

38. Определение заряда. Разложение Хана. Разложение Жордана

39. Теорема Радона—Никодима

40. Теорема о разложении меры

Задачи

Задача 1.3. Докажите, что множество $\mathcal{E}$ всех элементарных множеств — это алгебра, но не σ-алгебра.

Задача 1.5. Докажите, что канторово множество — борелевское.

Задача 1.8. Докажите, что всякое измеримое множество на прямой есть объединение борелевского множества и множества меры 0.

Задача 1.9. Докажите, что множество всех измеримых подмножеств отрезка равномощно множеству всех подмножеств отрезка.

Задача 1.12. Постройте нигде не плотное замкнутое подмножество отрезка положительной меры.

Задача 1.14. Докажите, что следующие множества измеримы по Лебегу:
б) множество критических значений C^1-гладкой функции на отрезке;
в) множество точек разрыва произвольной функции на отрезке.

Задача 2.1. Докажите, что мера Хаусдорфа множества X, $m_d(X)$, как функция от d ведет себя следующим образом: существует $d_* \geq 0$:

$$\forall d > d_*,\ m_d(X) = 0;\ \forall d < d_*,\ m_d(X) = \infty.$$

Задача 2.4. Оцените сверху хаусдорфову размерность канторова совершенного множества.

Задача 2.7. Чему равна хаусдорфова размерность окружности на плоскости?

Задача 2.11. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Докажите эквивалентность следующих определений измеримости функции f:
а) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо;
б) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) \leq c\}$ измеримо;
в) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) > c\}$ измеримо;
г) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) \geq c\}$ измеримо.

Задача 2.12. Пусть $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность измеримых функций. Докажите, что следующие функции также измеримы:
а) $\max(f_1, f_2)$ и $\min(f_1, f_2)$.

Задача 2.14. Пусть функции $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — измеримы. Докажите, что следующие функции также измеримы:
а) $f \pm g$;   б) fg;   в) f/g, при условии что функция g не обращается в ноль.

Задача 2.15. Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций.
а) Пусть $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для каждого x. Докажите, что функция f измерима.
б) Пусть $f_n(x) \to f(x)$ лишь почти всюду. Докажите, что f тем не менее измерима.

Задача 3.6. Постройте последовательность функций $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, сходящуюся к нулю по мере, для которой $\lim f_n(x)$ не существует ни в одной точке x.

Задача 3.7. Известно, что f_n сходится к f по мере и f_n сходится к g по мере. Докажите, что f эквивалентна g.

Задача 3.10. Докажите, что простая функция (т.е. функция, принимающая не более чем счётное множество значений) измерима тогда и только тогда, когда измеримы все её множества уровня. Верно ли это для произвольных функций?

Задача 3.11. Докажите, что каждая измеримая функция может быть представлена в виде равномерного предела измеримых простых функций.

Задача 3.14. Найдите интеграл Лебега $\int_{[0,1]} f\,d\mu$ функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, заданной формулами $f(0) = 0$, $f(x) = (-1)^n 2^{n+1}/n$ при каждом $x \in (1/2^{n+1}, 1/2^n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Задача 3.18. Докажите, что интеграл от неотрицательной суммируемой функции f по любому измеримому множеству $E \subset [0,1]$ неотрицателен и равен нулю только тогда, когда $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Задача 4.4. Приведите пример последовательности простых функций f_n на $[0,1]$ со следующими свойствами: $f_n \to f$ почти всюду, $\int_0^1 f_n\,dx = 0$, f не является суммируемой по Лебегу.

Задача 4.5. Докажите, что если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ на $[0,1]$ сходится к функции f в $L^1([0,1])$, т. е. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n - f|\,dx = 0$, и $g_n \to g$ почти всюду, причём $|g_n| \leq C$ для некоторой константы C, то $f_n g_n$ сходятся к fg в $L^1([0,1])$.

Задача 4.10. Докажите, что $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$.
Приведите пример, показывающий, что для $L^2([1,+\infty])$, $L^1([1,+\infty])$ это не так.

Задача 4.12. Докажите, что в пространстве $L^1([0,1])$ плотны следующие множества функций:
а) множество всех измеримых ограниченных функций,
б) множество всех кусочно-постоянных функций,
в) множество всех непрерывных функций.

Задача 4.11. Докажите, используя вышеприведённую задачу, что пространство $L^1([0,1])$ сепарабельно (имеет счётное всюду плотное подмножество).

Задача 5.4. Докажите, что дискретная мера может иметь не более, чем счетное число атомов.

Задача 5.11. Постройте сингулярную меру на отрезке.

Задача 5.16. Вычислите интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{(-1,1]} g\,d\phi$ для

$$\phi = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad g = 2.$$

Задача 5.17. Вычислите интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{(-1,1]} g\,d\phi$ для

$$\phi = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x+2 & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad g = 2.$$

Задача 5.18. Вычислите интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{(-1,1]} g\,d\phi$ для

$$\phi = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad g = 2 + x^2.$$

Задача 6.3. Найдите разложение Хана для следующих зарядов:
а) заряд $2\delta_0 - \lambda_{[-1,1]} + a\lambda_{[0,2]}$ на отрезке $[-1,2] \subset \mathbb{R}$; здесь $a \in \mathbb{R}$;
б) заряд $\delta_0 - x\lambda_{[-1,1]} + (x-1)\lambda_{[0,2]}$ на отрезке $[-1,2] \subset \mathbb{R}$; здесь x — координата на $\mathbb{R}$.

Задача 6.4. Докажите абсолютную непрерывность и найдите производную Радона–Никодима для:
а) заряда из пункта 6.3а) относительно меры $\lambda_{[-1,2]} + \delta_0$;
б) заряда из пункта 6.3б) относительно той же меры.

Задача 6.7. Найдите разложения Жордана для зарядов из задачи 6.3а,б).

Задача 6.9. а) Существует ли тело вращения, у которого площадь продольного сечения (проходящего через ось) конечна, а объем бесконечен?
б) Существует ли тело вращения, у которого объём конечен, а площадь продольного сечения (проходящего через ось) бесконечна?

Задача 6.13. При каких значениях $s > 0$ следующие функции интегрируемы на квадрате $[-1,1]^2$:
а) $f(x,y) = \frac{1}{|x-y|^s}$; б) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-s}$; в) $f(x,y) = \left|y - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|^{-s}$.

Задача 6.17. Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^3$. Найдите образ меры λ_B:
а) при ортогональной проекции на плоскость $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$;
б) при ортогональной проекции на прямую $\mathbb{R} \times \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.