

Задачи к экзамену по НИС «Геометрия и динамика» (осень 2018 г.)

Задача 1. Рассмотрим следующее отображение на множестве положительных чисел:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

а) Найдите число точек разрыва у $g(x) = f^{10}(x)$.

б) Найдите число неподвижных точек у $g(x)$ (то есть точек, для которых $g(x) = x$).

Задача 2. а) Будем называть последовательность из букв A, B, C хорошей, если в ней после каждой буквы C стоит буква A . Пусть

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{AA}^n & p_{AB}^n & p_{AC}^n \\ p_{BA}^n & p_{BB}^n & p_{BC}^n \\ p_{CA}^n & p_{CB}^n & p_{CC}^n \end{pmatrix} —$$

это 3×3 -матрица, составленная из чисел p_{ij}^n , равных количеству хороших последовательностей длины n , начинающихся с буквы i и заканчивающихся буквой j . Напишите формулу, связывающую матрицы P_n и P_{n+1} .

б) Докажите, что последовательность p_{ij}^n имеет асимптотику $a_{ij}H^n(1 + o(1))$ и найдите константу H .

Задача 3. В рассказе о перемежаемости спектров эрмитовых матриц фигурировала формула

$$\frac{(u - y_1) \dots (u - y_{N-1})}{(u - x_1) \dots (u - x_N)} = \frac{t_1}{u - x_1} + \dots + \frac{t_N}{u - x_N},$$

где u — формальная переменная, а числа $x_1, \dots, x_N$ попарно различны.

а) Предполагая наборы чисел $\{x_j\}$ и $\{y_i\}$ заданными, найдите $t_1, \dots, t_N$.

б) Докажите, что $t_1 + \dots + t_N = 1$.