Семинар 12.

Задача 1. *Отрезком, соединяющим две различные точки A и B* в вещественном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ называется множество точек в $\mathbb{A}$ вида $X = \lambda_1 A + \lambda_2 B$, где $\lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Подмножество M вещественного аффинного пространства называется *выпуклым*, если для любых двух различных точек $A, B \in M$ соединяющий их отрезок содержится в M. Пусть B - замкнутое выпуклое ограниченное подмножество аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, имеющее точку $0 = (0, ..., 0)$ в качестве внутренней точки, то есть содержащее вместе с точкой 0 некоторый шар положительного радиуса (в смысле любой нормы на $\mathbb{R}^n$). Для произвольного числа $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ положим $\lambda B := \{\lambda v \mid v \in B\}$. Определим с помощью B норму $\| * \|_B$ на $\mathbb{R}^n$ следующим образом: для $v \in \mathbb{R}^n$ положим $\| v \|_B := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid v \in \lambda B\}$. Докажите, что норма $\| * \|_B$ удовлетворяет всем свойствам нормы на $\mathbb{R}^n$.

Задача 2. Докажите *закон инерции для вещественных квадратичных форм*: сигнатура вещественной квадратичной формы не зависит от способа ее приведения к сумме квадратов.

Задача 3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ дан линейный оператор с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе. Существует ли ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора? Если да, то найдите его, а также матрицу оператора в этом базисе.

Задача 4. Коника в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ называется *вырожденной*, если она либо является точкой, либо содержит прямую. Укажите все типы аффинной эквивалентности вырожденных и невырожденных коник в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ и напишите уравнения какой-либо коники каждого типа.

Задача 5. Говорят, что невырожденная коника в E^2 *приведена к главным осям*, если ее уравнение имеет один из следующих трех видов: 1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ a, b \neq 0$; 2) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,\ a, b \neq 0$; 3) $y = x^2/a^2,\ a \neq 0$. а) Все ли невырожденные коники в E^2 могут быть приведены к главным осям? б) Являются ли следующие коники в E^2 невырожденными: б.1) $C = \{x^2 + 2xy - 3y^2 - y + 3 = 0\}$; б.2) $C = \{-2x^2 - 8xy - 8y^2 = 0\}$; б.3) $C = \{x^2 + 6xy + 9y^2 + 3y - 6 = 0\}$? в) Для тех из них, которые невырождены, найдите какие-нибудь движения евклидовой плоскости E^2, приводящие эти коники к главным осям, и укажите тип аффинной эквивалентности этих коник.

Задача 6. Существует ли центр симметрии у аффинной коники с уравнением $C = \{2x^2 + 8xy + 5y^2 - 12y - 2 = 0\}$, и если да, то найдите его.

Задача 7. Найдите множество точек, делящих в заданном отношении все хорды окружности, параллельные данной прямой.

Задача 8. Докажите, что середины хорд эллипса, параллельные данной прямой, лежат на одном из диаметров эллипса. (*Диаметр* эллипса - это прямая, проходящая через его центр симметрии.)

Задача 9. *Аффинной квадрикой* называется множество точек аффинного пространства $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, удовлетворяющих в аффинных координатах x, y, z в $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ квадратичному уравнению $F(x, y, z) + L(x, y, z) + C = 0$, где $F(x, y, z)$ - ненулевая квадратичная форма, $L(x, y, z)$ - линейная форма, а $C \in \mathbf{k}$ - константа. Аффинная квадрика в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ называется соответственно: 1) *эллипсоидом*, 2) *однополостным гиперболоидом*, 3) *двуполостным гиперболоидом*, 4) *эллиптическим параболоидом*, 5) *гиперболическим параболоидом*, 6) *конусом*, если она является аффинным образом соответственно: 1) сферы, 2) квадрики $Q = \{x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$, 3) квадрики $Q = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, 4) квадрики $Q = \{z = x^2 + y^2\}$, 5) квадрики $Q = \{z = x^2 - y^2\}$, 6) квадрики $Q = \{z^2 = x^2 + y^2\}$.
а) Являются ли эти квадрики центральными, то есть имеют ли они центр симметрии?
б) К какому из указанных 6 типов относятся квадрики в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ со следующими уравнениями:
б.1) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz - 2x - 100 = 0$; б.2) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 0$.

Задача 10. Квадрика в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ называется *вырожденной*, если она либо 1) содержит плоскость, либо является 2) точкой, либо 3) прямой, либо 4) конусом. а) Укажите все типы аффинной эквивалентности вырожденных и невырожденных квадрик в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ и напишите уравнения какой-либо квадрики каждого типа. б) Дайте определение *приведенной к главным осям невырожденной квадрики в E^3* через ее уравнение. в) Проверьте, что квадрика Q в E^3 с уравнением $4x^2 + 3y^2 + 8yz - 3z^2 - 2x + 6z + 2 = 0$ невырождена и центральна, и движением приведите ее к главным осям. Найдите формулы этого движения и координаты центра квадрики Q.