05.12.2018 Классическая теория поля

Лекция № 12

Рассмотрим задачу о вычислении электромагнитного поля, порождаемого заданными токами и плотностями зарядов. Это второй тип задач, допускающих точное решение (наряду с задачей о движении частицы в заданном поле).

Итак, наша цель — найти поле $A^\mu(x)$ из динамических уравнений Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu(x),$$

где $j^\mu(x)$ — заданные функции координат и времени в лабораторной системе отсчёта.

Напомним, что ток $j^\mu(x)$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0,$$

что обеспечивает непротиворечивость системы уравнений Максвелла, так как $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0$.

Учитывая определение $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $=2=$ получаем уравнения

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial\cdot A) = \frac{4\pi}{c} j^\mu,$$

где $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ – оператор Даламбера.

Воспользовавшись калибровочной свободой, упростим задачу: выберем калибровку, в которой $\partial_\mu A^\mu = 0$. Это так называемая Лоренцевская калибровка, включающая в себя в качестве более сильного условия Кулоновскую калибровку $A^0 = 0$, $\partial_i A^i = 0$.

Таким образом, получаем задачу:

$$\begin{cases} \Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x) \\ \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu j^\mu = 0. \end{cases}$$

Это – линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами при производных и заданной правой частью.

Решение будем искать с помощью функции Грина оператора Даламбера:

$$\Box G(x) = \delta^{(4)}(x) = \delta(x^0)\,\delta^{(3)}(\vec{x}).$$

Это уравнение понимается в виде равенства обобщённых функций. $G(x)$ – "ядро" обобщённой функции. Если $G(x)$ найдено, то, как легко видеть, решение нашей задачи будет иметь вид:

$$A^\mu(x) = \int_{M_4} d^4y\, G(x-y)\, j^\mu(y),$$

т.к. $\Box_x G(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Надо будет ещё дополнительно проверить свойство $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Проведению в жизнь этой программы мешает очевидное обстоятельство: решение уравнения для функции Грина не единственно. Добавка к $G(x)$ любого нетривиального решения уравнения $\Box\,\alpha(x) = 0$ тоже даёт функцию Грина. Причина этой трудности проста: мы не определили задачу до конца. Необходимо задать граничные условия.

Физический смысл диктует следующее очевидное требование:

$$G(x^0, \vec{x})\Big|_{x^0<0} = 0.$$

Действительно, наше решение для поля $A^\mu(x)$ имеет вид:

$$A^\mu(x^0, \vec{x}) = \int\limits_{M_4} d^4y\, G(x^0-y^0, \vec{x}-\vec{y})\, j^\mu(y^0, \vec{y}).$$

Ясно, что значение токов $j^\mu(y)$ в момент $y^0 > x^0$ не должны оказывать никакого влияния на поле $A^\mu(x^0, \vec{x})$ (будущее не влияет на прошлое). Условие $G(x^0, \vec{x})\big|_{x^0<0}$ обеспечивает это требование: при $y^0 > x^0 \Rightarrow x^0 - y^0 < 0$ и $\oint$ интеграл по таким y^0 зануляется.

$\boxed{10}$ Функция Грина с дополнительным условием $G(x^0, \vec{x})\Big|_{x^0<0} \equiv 0$ называется <u>запаздывающей</u>.

Совершим преобразование Фурье для $G(x)$ и $\delta^{(4)}(x)$:

$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x} \tilde{G}(p)$$

$$\delta^{(4)}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot x}.$$

Поскольку $\Box_x e^{ip\cdot x} = -p^2 e^{ip\cdot x}$, то для Фурье-образа $\tilde{G}(p)$ получим алгебраическое уравнение:

$$-p^2 \tilde{G}(p) = -((p^0)^2 - \vec{p}^{\,2})\tilde{G}(p) = 1.$$

$$\tilde{G}(p) = -\frac{1}{p^2}$$

$$\Downarrow$$

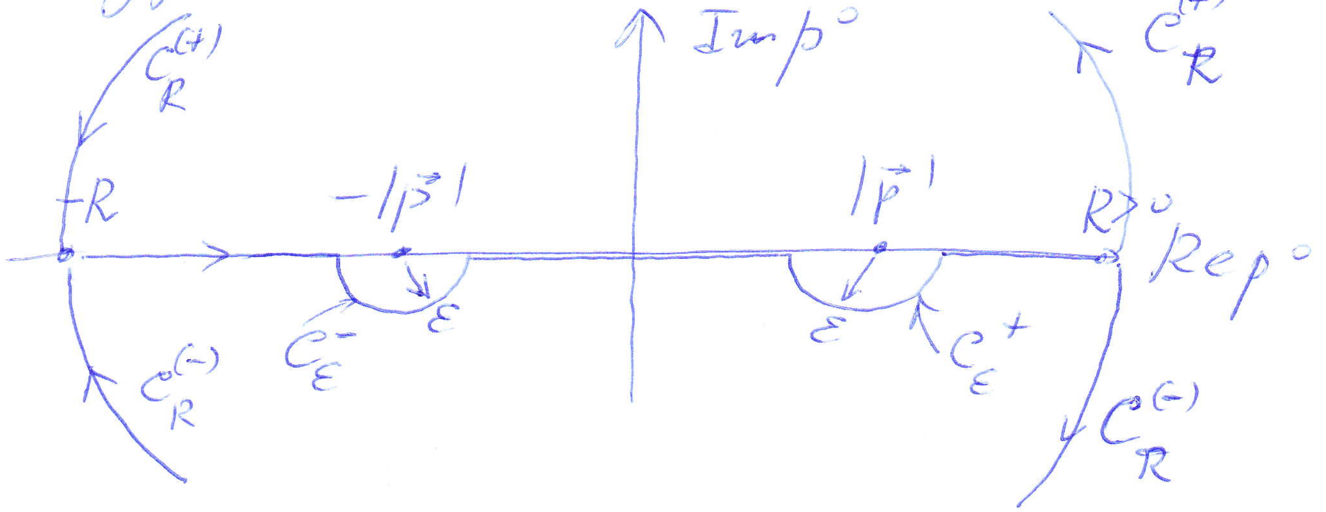
$$G(x) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip\cdot x}}{p^2} = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{e^{ip^0x^0 - i\vec{p}\vec{x}}}{(p^0)^2 - \vec{p}^{\,2}}$$

Однако это формальное выражение не даёт никакого решения, поскольку интеграл по переменной p^0 содержит полюса в точках $p^0 = |\vec{p}|$ и $p^0 = -|\vec{p}|$ и расходится:

$$-\int \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{e^{ip^0x^0}}{(p^0 - |\vec{p}|)(p^0 + |\vec{p}|)}$$ — не существует.

Заменим интеграл по p^0

комплексным интегралом по следующему контуру:



Интеграл по дуге окружности радиуса ε — сходящийся. Например:

$$\int\limits_{C_\varepsilon^+} \frac{dp^0\, e^{ip^0x^0}}{(p^0-|\vec p|)(p^0+|\vec p|)} = \left(\text{делаем замену } p^0=|\vec p|+\varepsilon e^{i\varphi}\right)$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\varepsilon i e^{i\varphi}\, d\varphi\, e^{ix^0(|\vec p|+\varepsilon e^{i\varphi})}}{\varepsilon e^{i\varphi}\,(2|\vec p|+\varepsilon e^{i\varphi})} = i\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{d\varphi\, e^{ix^0(\dots)}}{(2|\vec p|+\varepsilon e^{i\varphi})}$$

Дальше мы подразумеваем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$.

Итак, $\int$-л по p^0 понимаем так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0\, e^{ip^0x^0}}{(p^0-|\vec p|)(p^0+|\vec p|)} \to \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \frac{dp^0\, e^{ip^0x^0}}{(p^0-|\vec p|)(p^0+|\vec p|)} \right.$$

с обходом по $C_\varepsilon^\pm$

$$+ \int\limits_{C_R^{(\pm)}} \frac{dp^0\, e^{ip^0x^0}}{(p^0-|\vec{p}|)(p^0+|\vec{p}|)} \Bigg) .$$

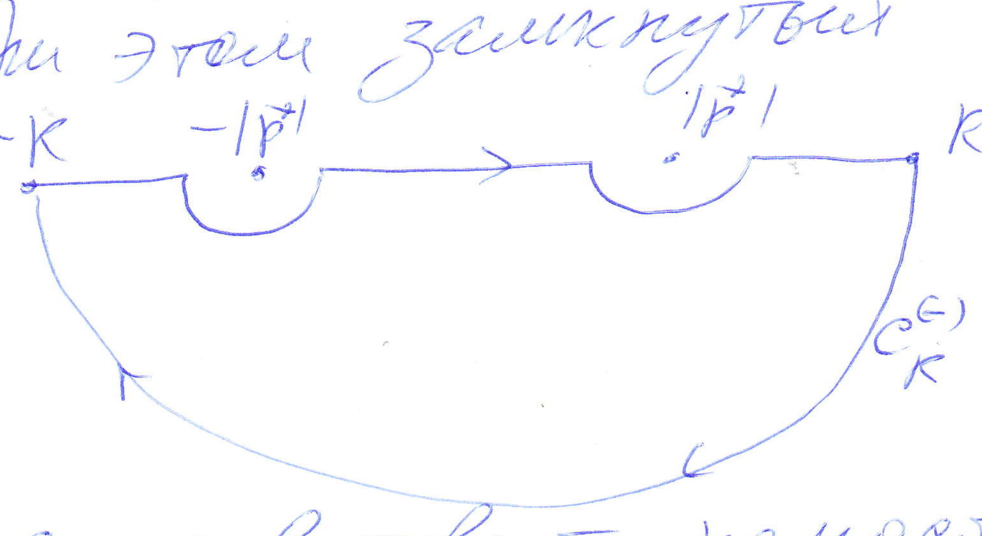
При $\underline{x^0<0}$ выбираем интегрирование по дуге $C_R^{(-)}$ в нижней полуплоскости, т.к. в этом случае экспонента убывает при больших по модулю $\mathrm{Im}\,p^0$:

$$\exp\big(i(\mathrm{Re}\,p^0 + i\,\mathrm{Im}\,p^0)(-|x^0|)\big) =$$

$$= \exp\big(-i|x^0|\mathrm{Re}\,p^0 + \underbrace{\mathrm{Im}\,p^0}_{<0}|x^0|\big) \xrightarrow[|\mathrm{Im}\,p^0|\to\infty]{} 0$$

Согласно лемме Жордана, интеграл по $C_R^{(-)} \to 0$ при $R\to\infty$.

При этом замкнутый контур

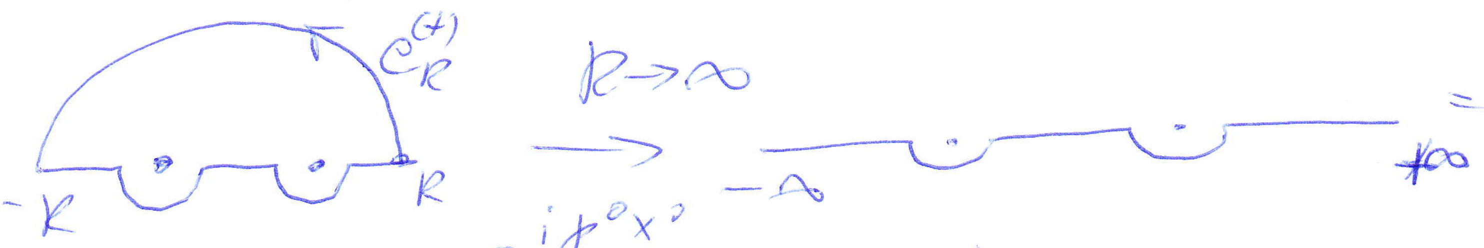


$\underline{\text{не}}$ охватывает полюсов в точках $p^0=|\vec{p}|$ и $p^0=-|\vec{p}|$ и $\Rightarrow$

весь интеграл равен 0.

Это обеспечивает граничное условие $G(x^0;\vec{x})\big|_{x^0<0} \equiv 0$.

Для $x^0 > 0$ контур необходимо замыкать по дуге $C_R^{(+)}$. Вклад интеграла по дуге тоже $\to 0$ при $R\to\infty$, но весь интеграл уже не ноль, т.к. внутри контура есть 2 простых полюса:



$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{p^0=\pm|\vec{p}|} \frac{e^{ip^0x^0}}{(p^0-|\vec{p}|)(p^0+|\vec{p}|)} =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2|\vec{p}|}\left(e^{i|\vec{p}|x^0} - e^{-i|\vec{p}|x^0}\right)$$

В итоге получаем для запаздывающей функции Грина:

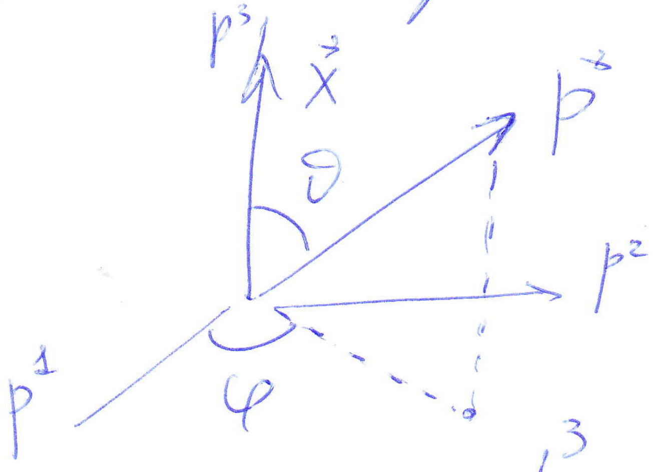
$$G(x^0,\vec{x}) = \begin{cases} -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \frac{i}{2|\vec{p}|}\left(e^{i|\vec{p}|x^0} - e^{-i|\vec{p}|x^0}\right) & x^0>0 \\ 0 & x^0<0 \end{cases}$$

Итак, промежуточный ответ: =9=

$$G(x^0, \vec{x}) = \vartheta(x^0) \int\limits_{R^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\sin(|\vec{p}|x^0)}{|\vec{p}|} e^{-i\vec{p}\vec{x}},$$

где $\vartheta(x^0) = \begin{cases} 1, & x^0 \geq 0 \\ 0, & x^0 < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

Для вычисления интеграла по пространственным компонентам $\vec{p}$ в R^3 перейдём к сферическим координатам, причём угол ϑ (широта в сферических координатах) будем отсчитывать от фиксированного вектора $\vec{x}$:



$$p^1 = |\vec{p}| \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$p^2 = |\vec{p}| \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$p^3 = |\vec{p}| \cos\vartheta$$

$$d^3p = |\vec{p}|^2 \sin\vartheta \, d|\vec{p}| \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = |\vec{p}| |\vec{x}| \cos\vartheta.$$

Подынтегральное выражение не

зависит от угла φ $\Rightarrow$ $\int_0^{2\pi} d\varphi$ даёт фактор 2π и мы получим:

$$G(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty |\vec{p}|\, d|\vec{p}| \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{-i|\vec{p}||\vec{x}|\cos\theta} \cdot \sin(|\vec{p}|x^0)$$

Интеграл по θ берётся заменой $z = \cos\theta$

$$G(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty d|\vec{p}| \sin(|\vec{p}|x^0) \sin(|\vec{p}||\vec{x}|)$$

Подынтегральное выражение – чётная функция от $|\vec{p}|$ $\Rightarrow$ интегрирование можно распространить на всю ось $|\vec{p}|$:

$$G(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{4\pi^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\vec{p}| \sin(|\vec{p}|x^0) \sin(|\vec{p}||\vec{x}|).$$

Очевидно, что данный интеграл неверно понимать в обычном смысле (например, как несобств. предел интегралов Римана). Этот интеграл приобретёт смысл после свёртки ядра $G(x^0,\vec{x})$ с какой-либо основной функцией из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ (простр. Шварца).

Пользуясь формулой $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$, представим $G(x^0,\vec{x})$ в виде:

$$G(x^0,\vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{16\pi^2|\vec{x}|}\int_{-\infty}^{+\infty} d|\vec{p}|\left(e^{i|\vec{p}|(|\vec{x}|-x^0)} + e^{i|\vec{p}|(x^0-|\vec{x}|)} - e^{i|\vec{p}|(x^0+|\vec{x}|)} - e^{-i|\vec{p}|(x^0+|\vec{x}|)}\right)$$

$$= \left(\text{Учтем, } \int_{-\infty}^{+\infty} d|\vec{p}|\, e^{\pm i|\vec{p}|S} = 2\pi\delta(S)\right) =$$

$$= \frac{\theta(x^0)}{8\pi^2|\vec{x}|}\left(2\pi\delta(x^0-|\vec{x}|) - 2\pi\delta(x^0+|\vec{x}|)\right) =$$

$$= \frac{\theta(x^0)\delta(x^0-|\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|}$$

Этому выражению можно придать явный Лоренц-инвариантный вид:

$$\delta(x^2) = \delta((x^0)^2-\vec{x}^2) =$$

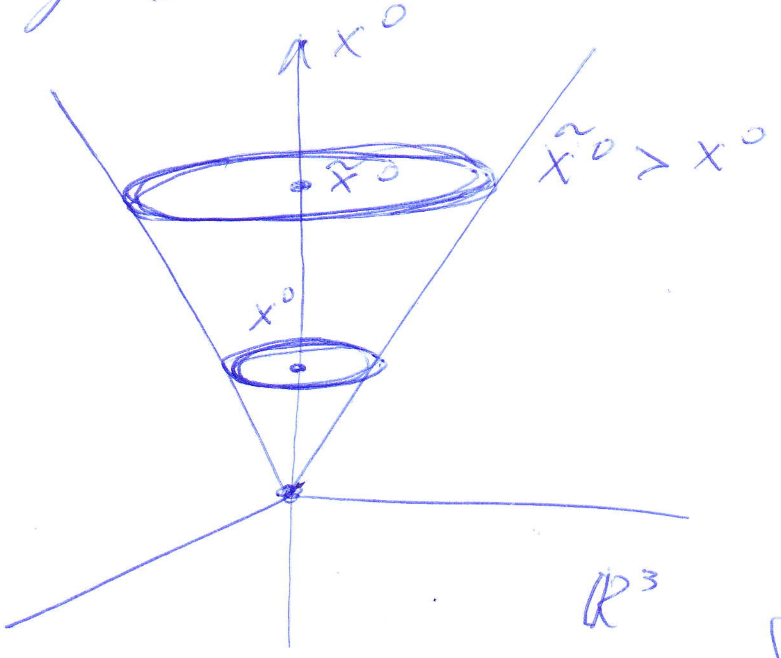
$$= \frac{1}{2|\vec{x}|}\left(\delta(x^0-|\vec{x}|) + \delta(x^0+|\vec{x}|)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(x^0)\delta(x^2) = \frac{\theta(x^0)\delta(x^0-|\vec{x}|)}{2|\vec{x}|}$$

Итак, для функции Грина получаем следующий окончательный ответ:

$$G(x) = \frac{\theta(x^0)\,\delta(x^0 - |\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|} = \frac{1}{2\pi}\,\theta(x^0)\,\delta(x^2).$$

Видно, что функция Грина сосредоточена на световом конусе $x^2 = 0$. Т.е. в $\forall$ фиксированный момент $x^0 > 0$ носитель $G(x^0, \vec{x})$ – шар в $\mathbb{R}^3$ радиуса x^0: $|\vec{x}| = x^0 = ct$.

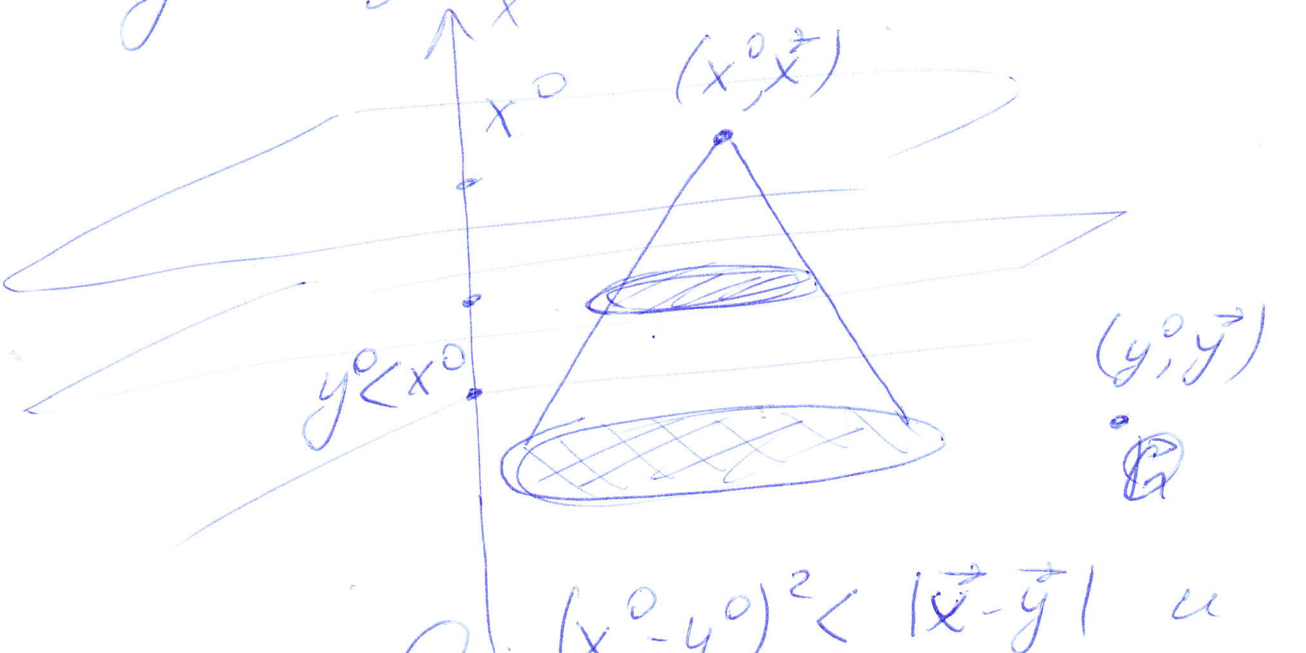


"Импульсный" источник $\delta^{(4)}(x)$ в момент $x^0 = 0$ в начале координат $\mathbb{R}^3$ $\vec{x} = 0$ породил расходящуюся со скоростью c "ударную волну" сферической формы.

Заметим, что функция $G(x)$ удовлетворяет принципу причинности:

$$G(x-y) \sim \delta\left(x^0-y^0-|\vec{x}-\vec{y}|\right),$$

поэтому $G(x-y)=0$, если $(x-y)^2<0$, т.е. $(x^0-y^0)^2<|\vec{x}-\vec{y}|^2$. Это означает, что в формирование поля $A^\mu(x^0,\vec{x})$ в точке $\vec{x}$ в момент x^0 не дают вклада значения тока $j^\mu(y)$ в слишком далёких точках $\vec{y}$, сигнал от которых не может успеть в точку $\vec{x}$ за время $\frac{x^0-y^0}{c}$.



$(x^0-y^0)^2<|\vec{x}-\vec{y}|$ и

В точке Q j^μ в Q <u>не дают</u> значения тока вклада в $A^\mu(x)=\frac{4\pi}{c}\int\limits_{M_4} d^4y\, G(x-y)\, j^\mu(y)$.

Осталось ещё убедиться, что наше решение

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c}\int_{M_4} d^4y\, G(x-y)\, j^\mu(y)$$

удовлетворяет условию лоренцевской калибровки $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Это верно, если токи $j^\mu(x)$ локализованы в конечной области пространства $\mathbb{R}^3$, что всегда выполняется в любой реальной физической ситуации.

То есть, будем считать, что помимо уравнения непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$, наши токи удовлетворяют требованию $j^\mu(x^0, \vec{x}) = 0$ при $|\vec{x}| > R$ для некоторого $R > 0$.

Пользуясь тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} G(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y^\mu} G(x-y),$$

получаем:

$$\partial^x_\mu A^\mu(x) = -\frac{4\pi}{c}\int_{M_4} d^4y \left(\partial^y_\mu G(x-y)\right) j^\mu(y) =$$

$$= -\frac{4\pi}{c}\int_{M_4} d^4y\, \partial^y_\mu\left(G(x-y)\, j^\mu(y)\right) + \frac{4\pi}{c}\int_{M_4} d^4y\, G(x-y)\, \underbrace{\partial^y_\mu j^\mu(y)}_{=0}$$

$$\partial^y_\mu\left(G(x-y)\,j^\mu(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y^0}(G j^0) + \frac{\partial}{\partial y^k}(G j^k)$$

Рассмотрим по отдельности вклад в интеграл от этих 2х слагаемых

$$\int d^4y \frac{\partial}{\partial y^0}\left(G(x-y)\,j^0(y)\right) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \int d^3y \int_{-\tau c}^{c\tau} dy^0 \frac{\partial}{\partial y^0}(G j^0) =$$

$$= \int d^3y \left(G(x^0 - c\tau, \vec{x}-\vec{y})\, j^0(c\tau, \vec{y})\right)\Bigg|_{-\tau\to-\infty}^{\tau\to+\infty}$$

$$G \sim \delta(x^0 - c\tau - |\vec{x}-\vec{y}|) \Rightarrow$$

$\Rightarrow G$ локализована в точках $(c\tau, \vec{y})$ таких, что: $c\tau = x^0 - |\vec{x}-\vec{y}|$

При $\tau\to+\infty$ $G=0$ при $c\tau > x^0$, при $\tau\to -\infty$ поверхность локализации G уходит в ∞ по $\vec{y}$, но $j^0(c\tau,\vec{y})$ зануляется, когда $|\vec{y}| > R$.

Итак, в случае локальных токов $\frac{\partial}{\partial y^0}(G j^0)$ не дают вклада в $\partial_\mu A^\mu$.

Второе слагаемое:

$$\int\limits_{M_4} \partial_k^y \big(G(x-y) j^k(y)\big) d^4y =$$

$$= \lim_{\tilde{R}\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy^0 \int_{S_{\tilde{R}}} \partial_k^y \big(G(x-y) j^k(y)\big) d^3y =$$

шар радиуса $\tilde{R}$.

= (по теореме Гаусса $\int$ по объёму от дивергенции переходит в $\int$ по поверхности шара от потока) =

$$= \lim_{\tilde{R}\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy^0 \oint_{\partial S_{\tilde{R}}} G(x-y)\, \vec{j}(y)\, \vec{n}(y)\, d\sigma$$

вектор внешней нормали.

При $\tilde{R}\to\infty$ $\vec{j}(y^0,\vec{y})$ на поверхности шара $\partial S_{\tilde{R}}$ зануляется при $\tilde{R} > R$.

Итак, второе слагаемое тоже $= 0$

$\Rightarrow \partial_\mu A^\mu(x) = 0$ для локальных $j^\mu(x)$.