Обобщенные функции умеренного роста

4.1. Докажите, что **(a)** дельта-функция Дирака не регулярна; **(b)** производная дельта-функции не задается никакой мерой Радона[1].

4.2. Докажите, что обобщенная функция

$$f(\varphi) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

(см. лекцию) не задается никакой мерой Радона.

4.3. Пусть φ — гладкая функция на $\mathbb{R}$ умеренного роста[2], и пусть $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Докажите, что $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.

4.4. Пусть φ — гладкая функция на $\mathbb{R}$ умеренного роста, и пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Представьте обобщенные функции **(a)** $\varphi\delta_{x_0}$ и **(b)** $\varphi\delta'_{x_0}$ в виде линейных комбинаций δ_{x_0} и (если понадобится) ее производных. (Здесь $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ — функция Дирака в точке x_0, заданная формулой $\delta_{x_0}(\psi) = \psi(x_0)$.)

4.5. Пусть $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
(a) Предположим, что $\varphi f = 0$; верно ли, что $f(\varphi) = 0$?
(b) Предположим, что $f(\varphi) = 0$; верно ли, что $\varphi f = 0$?

4.6. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно C^1-функция, причем f и ее классическая производная f'_{class}, определенная почти всюду, растут на бесконечности не быстрее некоторого многочлена (так что обе они могут рассматриваться как элементы пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$). Обозначим через $\{x_k\}$ множество точек разрыва функции f. Докажите, что $f' = f'_{\text{class}} + \sum_k a_k \delta_{x_k}$, где f' — обобщенная производная f, а a_k — скачок функции f в точке x_k.

4.7. Приведите пример непрерывной, почти всюду дифференцируемой функции на $\mathbb{R}$, чья классическая производная не совпадает с обобщенной производной.

4.8-B. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — функция ограниченной вариации с компактным носителем. Обозначим через μ_f соответствующую меру Лебега–Стилтьеса (она, очевидно, является мерой Радона на $\mathbb{R}$). Докажите, что $f' = \mu_f$ (где f' — обобщенная производная f).

Указание. Для $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ вычислите двумя способами интеграл функции $\psi(x, y) = \varphi'(x)$ по множеству $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -C \leqslant x < y \leqslant C\}$ относительно меры $dx\, d\mu_f(y)$.

4.9. Вычислите следующие обобщенные производные: **(a)** $(|x+1| + |x-1|)''$; **(b)** $(\ln|x|)'$; **(c)** $|\sin x|''$.

4.10. Найдите все $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, удовлетворяющие следующим уравнениям: **(a)** $f' = 0$; **(b)** $xf = 0$ (где x — координата на $\mathbb{R}$); **(c)** $x^2 f = 0$.

4.11-B. (a) Найдите разложение Фурье функции $f(x) = x/2 - x^2/4\pi$ на отрезке $[0, 2\pi]$ по тригонометрическому базису e^{inx} ($n \in \mathbb{Z}$).
(b) (*формула суммирования Пуассона*). Докажите равенство $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n)$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

---

[1] *Мера Радона* на $\mathbb{R}$ — это σ-аддитивная (не обязательно положительная) конечная мера на классе всех относительно компактных борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Каждая мера Радона μ на $\mathbb{R}$ порождает линейный функционал f_μ на пространстве $C_c^\infty(\mathbb{R})$ гладких функций с компактным носителем по формуле $f_\mu(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$. Некоторые из них продолжаются до непрерывных функционалов на пространстве Шварца, т.е. до обобщенных функций умеренного роста.

[2] Это означает, что каждая производная φ растет на бесконечности не быстрее некоторого многочлена. Если φ обладает этим свойством, то для любой $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ определена $\varphi f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ по правилу $(\varphi f)(\psi) = f(\varphi\psi)$; см. лекции.