А. К. Погребков

Введение в функциональный анализ

Высшая школа экономики
1-й семестр 2018/2019 гг.

Содержание

1. Лекция. Введение.

Функциональный анализ – анализ в бесконечномерных линейных пространствах. В этом смысле он представляет собой такое же обощение математического анализа, как последний – обобщение элементарной математики. Для начала мы вспомним некоторые понятия математического анализа, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1. **Некоторые стандартные определения.**

Определение 1.1. *Векторным (линейным) пространством V называется упорядоченная четверка $(V, C, +, \cdot)$, где V – непустое множество элементов произвольной природы, которые называются векторами, C – поле, элементы которого назаываются скалярами (мы рассматриваем $\mathbb{C}$), операция $+$ – операция сложения, осуществляет отображение $V \times V \xrightarrow{+} V$, т.е. каждой паре векторов из V сопоставляет единственный элемент из V, называемый их суммой, $x + y$, и $\cdot$ – операция умножения на скаляры, $C \times V \xrightarrow{\cdot} V$, сопоставляющая каждому элементу λ поля C и каждому элементу x множества V единственный элемент множества V, обозначаемый $\lambda \cdot x$, причем заданные операции удовлетворяют следующим аксиомам — аксиомам линейного (векторного) пространства:*

1. *$x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$ (коммутативность);*
2. *$x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых $x, y, z \in V$ (ассоциативность);*
3. *существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$, называемый нулевым вектором или просто нулем пространства V (существование нейтрального элемента относительно сложения);*
4. *для любого $x \in V$ существует такой элемент $-x \in V$, что $x + (-x) = 0$, называемый вектором, противоположным вектору x;*
5. *для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $x \in V$ выполнено $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения на скаляр);*
6. *для любого $x \in V$ выполнено $1 \cdot x = x$ (унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля $\mathbb{C}$ сохраняет вектор).*
7. *для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $x \in V$ выполнено $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров);*
8. *для любых $\alpha \in \mathbb{C}$ $x, y \in V$ выполнено $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов).*

Таким образом, операция сложения задает на множестве V структуру (аддитивной) абелевой группы. Векторные пространства, заданные на одном и том же множестве элементов, но над различными полями, будут различными векторными пространствами (например, множество пар действительных чисел $\mathbb{R}^2$ может быть двумерным векторным пространством над полем действительных чисел либо одномерным – над полем комплексных чисел). В случае, когда известно о каком поле и каких операциях идет речь, векторное пространство обозначается просто одной буквой, например V.

Определение 1.2. *Метрическое пространство есть пара (M, d), где M – множество, а d – числовая вещественная функция, которая определена на декартовом произведении $M \times M \to \mathbb{R}$ и такова, что для любых $x, y, z \in M$:*

1. *$d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ (аксиома симметрии);*
3. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (аксиома треугольника или неравенство треугольника).*

При этом элементы множества M называются точками метрического пространства, а функция d называется метрикой.

Заметим, что из приведенных аксиом следует неотрицательность функции расстояния:

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Значение $d(x,y)$ называется расстоянием между точками x и y в метрическом пространстве M.

Биекция между различными метрическими пространствами (M, d_M) и (Y, d_Y), сохраняющая расстояния, называется **изометрией**, а сами пространства (M, d_M) и (Y, d_Y) – **изометричными**. Если M – подмножество множества X, то сужение $d_M = d_X|_M$ метрики d_X на множество M дает метрическое пространство (M, d_M), которое называется подпространством пространства (X, d).

Любое метрическое пространство обладает естественной **топологией**, базой для которой служит множество открытых шаров, то есть множеств следующего типа:

$$B(x;r) = \{y \in M| \quad d(x,y) < r\},$$

где x – точка в M, r – положительное вещественное число, называемое радиусом шара. Множество O является **открытым**, если вместе с любой своей точкой оно содержит открытый шар с центром в этой точке. Две метрики, определяющие одну и ту же топологию, называются **эквивалентными**.

Пример 1.1. *Пусть $M = C[0,1]$ (вещественнозначные). Рассмотрим две метрики:*

$$d_1(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_2(f,g) = \int_0^1 dx\, |f(x) - g(x)|.$$

Легко видеть, что $d_2 \le d_1$.

Определение 1.3. *Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве M, $x_n \in M$, называется **сходящейся** к элементу $x \in M$ тогда и только тогда, когда $d(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначение: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$.*

Определение 1.4. *Последовательность $\{x_n\} \subset (M,d)$ называется **последовательностью Коши (или фундаментальной)** если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для любых $m, n \ge N$ расстояние $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Определение 1.5. *Метрическое пространство называется **полным**, если любая последовательность Коши в нем сходится к некоторому элементу этого пространства.*

Любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши. Примеры полных метрических пространств: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Определение 1.6. *Подпространство $B \subset M$ метрического пространства M называется **плотным** в M, если любой $x \in M$ является пределом последовательности элементов из B.*

Определение 1.7. *Функция $f(x)$ из метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (Y,ρ) называется **непрерывной** в точке x, если $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$ для любой последовательности $x_n \xrightarrow{d} x$.*

Пример 1.2. *Рассмотрим $f_n(x)$, как на Рис. 1, и пусть d_1 и d_2 такие, как в Примере 1.1. Легко видеть, что $f_n \xrightarrow{d_2} 0$ при $n \to \infty$, а $d_1(f_m, f_n) = 1$ при всех $m \ne n$, так что тут сходимости нет. Это иллюстрирует тот факт, что тождественное отображение пространства $(C[0,1], d_2)$ в $(C[0,1], d_1)$ не непрерывно, а обратное отображение непрерывно.*

Теорема 1.1. *Если (M,d) – неполное метрическое пространство, то существует полное метрическое пространство $(\overline{M}, d)$, такое что M изометрично плотному подмножеству в $\overline{M}$.*

Литература к лекции 1: М.Рид, Б.Саймон "Методы современной математической физики", том 1, "Функциональный анализ".

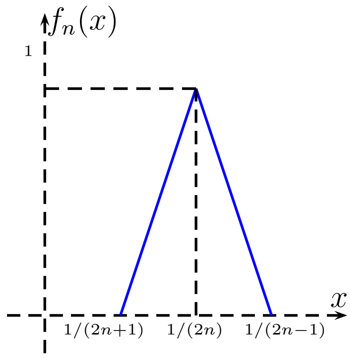

Рис. 1. Функция $f_n(x)$ из Примера 1.2.

2. Лекция. Евклидово пространство. Нормированное пространство.

2.1. Евклидово пространство и ортогональные системы.

Определение 2.1. *Комплексное векторное пространство V (т.е. векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$) называется евклидовым или пространством со скалярным произведением, если на нем задано отображение*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad V \to \mathbb{C},$$

причем для любых $u, v, w \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнены следующие свойства:

(1) $\langle v, v\rangle \geq 0$, *причем* $\langle v, v\rangle = 0$ *тогда и только тогда, когда* $v = 0$;
(2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$;
(3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.

Из свойств (2) и (3) следует, что

$$\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle, \qquad \langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\mu}\langle u, w\rangle,$$

для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Пример 2.1. *Комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{u_j} v_j.$$

Пример 2.2. *Пространство $C[a; b]$ непрерывных комплекснозначных функций на отрезке $[a; b]$ со скалярным произведением*

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b dx\, \overline{u(x)} v(x).$$

Нормой вектора $v \in V$ называется число $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Определение 2.2. *Векторы $u, v \in V$* ***ортогональны*** *друг другу, если $\langle u, v\rangle = 0$, что обозначается $u \perp v$. Система векторов $\{v_j\}$ из V называется* ***ортонормированной****, если*

(1) $\langle v_j, v_k\rangle = 0$ *при всех* $j \neq k$;
(2) $\langle v_j, v_j\rangle = 1$ *при всех* j.

Легко видеть, что если $u \perp v$, то

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1 (Пифагор)**.** *Пусть* $\{e_i\}_{i=1}^N$ *есть ортонормированная система в евклидовом пространстве* V*, тогда для любого* $v \in V$ *имеет место равенство*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle e_i, v\rangle|^2 + \left\| v - \sum_{i=1}^N \langle e_i, v\rangle e_i \right\|^2.$$

Доказательство. Представим v в виде

$$v = \sum_{i=1}^N \langle e_i, v\rangle e_i + \left(v - \sum_{i=1}^N \langle e_i, v\rangle e_i \right).$$

Векторы $\sum_{i=1}^N \langle e_i, v\rangle e_i$ и $v - \sum_{i=1}^N \langle e_i, v\rangle e_i$ ортогональны друг другу, а тогда доказательство следует из (2.1). ■

Следствие 2.1 (неравенство Бесселя)**.** *Если* $\{e_i\}_{i=1}^N$ *– ортонормированная система в евклидовом пространстве* V*, то для любого* $v \in V$ *справедливо неравенство*

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^N |\langle v, e_i\rangle|^2.$$

Следствие 2.2 (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Для любых* $u, v \in V$ *справедливо неравенство*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Доказательство. При $v = 0$ неравенство превращается в очевидное равенство. Если $\|v\| \neq 0$, то рассмотрим вектор $v/\|v\|$ с нормой равной 1. По неравенству Бесселя для любого $u \in V$ имеет место соотношение

$$\|u\|^2 \geq \left| \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right|^2 = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2},$$

что и доказывает утверждение этого следствия.■

Следствие 2.3 (тождество параллелограмма)**.** . *Для любых* $u, v \in V$ *имеет место тождество*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

иначе говоря, сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма, порожденного векторами u *и* v*, равна сумме квадратов длин его сторон.*

2.2. **Определение, связь с евклидовым пространством.**

Определение 2.3. *Нормированное векторное пространство – векторное пространство* V *над некоторым полем* C *(мы будем рассматривать только* $C = \mathbb{C}$*) вместе с функцией* $\|\cdot\|$*, отображающей* $V \to \mathbb{R}$ *так, что выполнены аксиомы*

(1) $\|v\| \geq 0$ *для любого* $v \in V$*;*
(2) $\|v\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $v = 0$*;*
(3) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *для любых* $v \in V$ *и* $\alpha \in C$*;*
(4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(неравенство треугольника).*

Итак, любое нормированное пространство является метрическим с метрикой, задаваемой нормой:

$$d(u, v) = \|u - v\|,$$

т.е. в нормированных пространствах определены понятия сходимости и полноты, используемые в метрических пространствах.

Предложение 2.1. *Любое евклидово пространство V является нормированным с нормой*
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Доказательство. Пусть V – евклидово пространство. Свойства (1)–(3) нормы немедленно следуют из аналогичных свойств скалярного произведения на V. Свойство (4) вытекает из неравенства Коши–Буняковского:
$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \le \\ &\le \langle u, u\rangle + 2|\langle u, v\rangle| + \langle v, v\rangle \le \langle u, u\rangle + 2\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} + \langle v, v\rangle = \\ &= \left(\sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}\right)^2,\end{aligned}$$
что и доказывает свойство (3). ■

Замечание 2.1. *Если норма определена через скалярное произведение, это скалярное произведение произвольных векторов $u, v \in V$ можно выразить в терминах квадратов нормы с помощью* ***поляризационного тождества****:*
$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} - i\frac{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2}{4},$$
что вовсе не означает, что с помощью этого равенства можно определить скалярное произведение в нормированном пространстве. Например, невозможно доказать свойство линейности.

2.3. Ограниченные линейные отображения.

Определение 2.4. *Линейное отображение (оператор) $T\colon V_1 \to V_2$ из нормированного пространства V_1 с нормой $\|\cdot\|_1$ в нормированное пространство V_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ называется ограниченным, если существует константа $C > 0$ такая, что*
$$\|Tv\|_2 \le C\|v\|_1 \quad \text{для всех } v \in V_1.$$
Наименьшая из таких констант C называется нормой $\|T\|$ оператора T, т.е.
$$\|T\| = \sup_{\|v\|_1 = 1} \|Tv\|_2.$$

Легко доказать следующее

Предложение 2.2. *Пусть $T\colon V_1 \to V_2$ – линейное отображение из нормированного пространства V_1 в нормированное пространство V_2. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *T непрерывно в одной точке V_1;*
(2) *T непрерывно во всех точках V_1;*
(3) *T ограничено.*

Теорема 2.2 (об ограниченном линейном отображении)**.** *Пусть $T\colon V_1 \to V_2$ – ограниченное линейное отображение из нормированного пространства V_1 в* ***полное*** *нормированное пространство V_2. Тогда T продолжается единственным образом на пополнение $\overline{V_1}$ пространства V_1 до ограниченного линейного отображения $\widetilde{T}\colon \overline{V_1} \to V_2$.*

Доказательство. Для каждого $v \in \overline{V_1}$ найдется последовательность $\{v_n\}$ векторов из V_1 такая, что $v_n \to v$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{v_n\}$ является последовательностью Коши, поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что
$$\|v_n - v_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|T\|} \quad \text{при } m, n > N.$$
Из оценки
$$\|Tv_n - Tv_m\|_2 = \|T(v_n - v_m)\|_2 \le \|T\| \cdot \|v_n - v_m\|_1 < \varepsilon$$

следует, что $\{Tv_n\}$ является последовательностью Коши в V_2. Ввиду полноты V_2 последовательность $\{Tv_n\}$ сходится к некоторому вектору $u \in V_2$.

Положим $\widetilde{T}v = u$ и покажем, что это определение не зависит от выбора последовательности $v_n \to v$. Действительно, если $v'_n \to v$ – другая последовательность векторов из V_1, сходящаяся к v, то по доказанному последовательность $\{Tv'_n\}$ должна сходиться к некоторому вектору $u' \in V_2$. Но перемешанная последовательность $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \ldots$ также сходится к v. Поэтому по тем же соображениям, что и выше, последовательность образов $Tv_1, Tv'_1, Tv_2, Tv'_2, \ldots$ должна иметь предел, откуда

$$u' = \lim_{n\to\infty} Tv'_n = \lim_{n\to\infty} Tv_n = u,$$

т.е. $u' = u$.

Продолженный оператор $\widetilde{T}\colon \overline{V_1} \to V_2$ ограничен, поскольку

$$\|\widetilde{T}v\|_2 \le \lim_{n\to\infty} C\|v_n\|_1 = C\|v\|_1.$$

Не составляет труда проверить линейность и единственность построенного оператора $\widetilde{T}$. ■

Литература к лекции 2: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

3. Лекция. Гильбертовы пространства

3.1. Определение и примеры.

Определение 3.1. *Полное евклидово пространство называется гильбертовым.*

Определение 3.2. *Два гильбертовых пространства H_1 и H_2 называются изоморфными, если существует линейный оператор U, отображающий биективно H_1 на H_2 такой, что*

$$\langle Uv, Uw\rangle_{H_2} = \langle v, w\rangle_{H_1} \text{ для всех } v, w \in H_1.$$

Оператор U, обладающий указанным свойством, называется ***унитарным***.

Пример 3.1 (Пространство $L_2(a, b)$). *Определим пространство $L_2(a, b)$ как множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на интервале (a, b), для которых конечен интеграл*

$$\int_a^b dx\, |f(x)|^2 < \infty$$

по мере Лебега. Скалярное произведение в $L_2(a, b)$ задается формулой

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b dx\, \overline{f(x)} g(x). \tag{3.1}$$

Оно корректно определено благодаря неравенству

$$\left|\overline{f(x)} g(x)\right| \le \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{|g(x)|^2}{2},$$

из которого вытекает сходимость интеграла (3.1). Как известно из курса математического анализа, пространство $L_2(a, b)$ полно. Более того, оно совпадает с пополнением пространства $C[a, b]$ по норме

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b dx\, |f(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Пример 3.2 (Пространство ℓ^2). *Это пространство состоит из последовательностей $x = \{x_n\}_{n-1}^{\infty}$ комплексных чисел x_n, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в ℓ^2 задается формулой

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n.$$

Полнота этого пространства проверяется непосредственно.

Пример 3.3 (прямая сумма). *Прямой суммой гильбертовых пространств H_1 и H_2 называется гильбертово пространство $H_1 \oplus H_2$, состоящее из пар (v_1, v_2), где $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$, наделенное скалярным произведением*

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle u_1, v_1\rangle_{H_1} + \langle u_2, v_2\rangle_{H_2}.$$

Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность гильбертовых пространств. ***Прямой суммой***

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

этих пространств называется гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $v_n \in H_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{H_n}^2 < \infty.$$

Естественное скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, v_n \rangle_{H_n}.$$

3.2. **Ортогональная проекция.** Пусть H есть гильбертово пространство и E – его замкнутое линейное подпространство. Тогда E, наделенное скалярным произведением, унаследованным из H, само является гильбертовым пространством. Обозначим через $E^{\perp}$ подпространство, состоящее из векторов $u \in H$, ортогональных к E, т.е. удовлетворяющих условию: $\langle u, v \rangle = 0$ для всех $v \in E$. Это подпространство линейно и замкнуто (проверьте это!) и потому также является гильбертовым пространством с индуцированным скалярным произведением. Оно называется ортогональным дополнением к E.

Лемма 3.1. *Для любого $v \in H$ найдется единственный вектор $w \in E$, ближайший к v.*

Доказательство. Расстояние от v до подпространства E равно по определению

$$d = \inf_{u \in E} \|v - u\|.$$

Выберем последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in E$, для которой $\|v - u_n\| \to d$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|^2 &= \|(u_n - v) - (u_m - v)\|^2 = (\text{тождество параллелограмма}) \\
&= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - u_m\|^2 - \|(u_n - v) + (u_m - v)\|^2 = \\
&= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - u_m\|^2 - 4\Big\|v - \frac{u_n + u_m}{2}\|^2 \le \\
&\le 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - u_m\|^2 - 4d^2 \qquad \Big(\text{поскольку } \frac{u_n + u_m}{2} \in E\Big).
\end{aligned}$$

Последнее выражение при $m, n \to \infty$ стремится к $2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$. Следовательно, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши, сходящаяся к некоторому элементу $w \in H$, который, ввиду замкнутости E, должен принадлежать E. При этом $\|v - w\| = d$, т.е. вектор w удовлетворяет условию леммы.

Если $w' \in E$ – другой элемент, удовлетворяющий условию $\|v - w'\| = d$, то перемешанная последовательность $w, w', w, w', \ldots$ должна сходиться к некоторому элементу из E (это доказывается также, как в первой части доказательства), откуда следует, что $w = w'$. ■

Теорема 3.1 (Об ортогональной проекции)**.** *Пусть H есть гильбертово пространство и E – его замкнутое линейное подпространство. Тогда любой элемент $v \in H$ однозначно представляется в виде*

$$v = u + w,$$

где $u \in E$, $w \in E^{\perp}$.

Доказательство. Обозначим через u вектор из E, ближайший к v, и положим $w = v - u$. Покажем, что $w \in E^{\perp}$. Действительно, обозначим норму $\|v - u\|$ через d. Тогда для любого $z \in E$ и любого $t \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$d^2 \le \|v - (u + tz)\|^2 = \|w - tz\|^2 = d^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle w, z \rangle + t^2\|z\|^2.$$

откуда $2t\,\mathrm{Re}\langle w, z \rangle \le t^2\|z\|^2$. Следовательно, $\mathrm{Re}\langle w, z \rangle = 0$. Проводя такое же рассуждение с заменой t на it, покажем, что и $\mathrm{Im}\langle w, z \rangle = 0$, т.е. $\langle w, z \rangle = 0$ для любых $z \in E$. Тем самым

$w \in E^{\perp}$. Если $v = u_1 + w_1$ – другое представление, удовлетворяющее условиям теоремы, то

$$u - u_1 = w_1 - w = z \in E \cap E^{\perp},$$

откуда следует, что $\langle z, z\rangle = 0$, т.е. $z = 0$, а тогда и $u = u_1$, $w = w_1$. ■

Замечание 3.1. *Из доказанной теоремы вытекает, что пространство H изоморфно прямой сумме $E \oplus E^{\perp}$, причем указанный изоморфизм задается отображением*

$$E \oplus E^{\perp} \ni (u, w) \mapsto u + w \in H.$$

3.3. **Сопряженное пространство.**

Определение 3.3. *Пространство непрерывных линейных функционалов на H, т.е. непрерывных линейных отображений $H \to \mathbb{C}$, называется пространством, сопряженным к H, и обозначается через H^*.*

Лемма 3.2 (Лемма Рисса)**.** *Для любого непрерывного линейного функционала $f \in H^*$ найдется единственный элемент $\xi \in H$ такой, что*

$$f(v) = \langle \xi, v\rangle \text{ для любого } v \in H.$$

Доказательство. Обозначим через N множество всех $v \in H$ таких, что $f(v) = 0$. Это множество линейно и замкнуто (ввиду непрерывности f), т.е. является замкнутым линейным подпространством в H. Если $N = H$, то в качестве ξ можно взять $\xi = 0$. Если же $N \neq H$, то по теореме об ортогональной проекции в $N^{\perp}$ найдется ненулевой элемент ξ_0. Заметим, что вектор $f(v)\xi_0 - f(\xi_0)v \in N$ для любого $v \in H$, поскольку функционал f на этом векторе равен нулю. Поэтому

$$0 = \langle \xi_0, f(v)\xi_0 - f(\xi_0)v\rangle = f(v)\langle \xi_0, \xi_0\rangle - f(\xi_0)\langle \xi 0, v\rangle,$$

откуда $f(v)\langle \xi_0, \xi_0\rangle = f(\xi_0)\langle \xi 0, v\rangle$. Следовательно, утверждение Леммы выполняется для вектора

$$\xi = f(\xi_0)\frac{\xi_0}{\langle \xi_0, \xi_0\rangle}.$$

Единственность такого вектора ξ очевидна. ■

Замечание 3.2. *Из доказательства леммы Рисса следует, что $H = N \oplus \{\lambda\xi_0 \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}$, так как любой элемент $v \in H$ представляется в виде*

$$v = \left(v - \frac{f(v)}{f(\xi_0)}\xi_0\right) + \frac{f(v)}{f(\xi_0)}\xi_0 \in N \oplus \{\lambda\xi_0\}.$$

Замечание 3.3. *Полезно иметь в виду также следующий комплексно-сопряженный вариант леммы Рисса. Пусть $f\colon H \to \mathbb{C}$ – сопряженно-линейный функционал на H, т.е. аддитивный функционал, удовлетворяющий условию: $f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in H$. Тогда существует единственный элемент $\xi \in H$ такой, что $f(v) = \langle v, \xi\rangle$ для любого $v \in H$. Для доказательства достаточно применить лемму Рисса к функционалу $\overline{f}$.*

Определение 3.4. *Линейный функционал $f\colon H \to \mathbb{C}$ называется ограниченным, если существует константа $C > 0$ такая, что $|f(v)| \le C\|v\|$ для всех $v \in H$. Наименьшая из таких констант C называется нормой функционала f и обозначается*

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)|.$$

Это определение является ни чем иным, как спецификацией определения ограниченного линейного оператора на случай линейных отображений $H \to \mathbb{C}$. Также, как для линейных операторов, эквивалентны следующие утверждения:

(1) линейный функционал f ограничен;
(2) f непрерывен хотя бы в одной точке H
(3) f непрерывен всюду на H.

Замечание 3.4 (дополнение к лемме Рисса)**.**

(3.2) *В условиях теоремы Рисса* $\|f\|_{H^*} = \|\xi\|_H$.

Действительно,

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\langle \xi, v\rangle| \leq \text{ (неравенство Коши–Буняковского)}$$
$$\leq \sup_{\|v\|=1} \big(\|\xi\| \cdot \|v\|\big) = \|\xi\|.$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \geq \left| f\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right| = \left|\left\langle \xi, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right\rangle\right| = \|\xi\|.$$

Полученные оценки с противоположных сторон доказывают (3.2).

Литература к лекции 3: М.Рид, Б.Саймон "Методы современной математической физики", том 1, "Функциональный анализ".

4. Лекция. Ортонормированные базисы

4.1. **Лемма Рисса (продолжение).** С учетом (3.2) как следствие леммы Рисса, доказанной на предыдущей лекции, мы имеем:

Теорема 4.1. *Отображение*

$$H \ni \xi \longmapsto f(v) = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in H,$$

устанавливает сопряженно-линейную изометрию $\xi \mapsto f$ пространства H на сопряженное к нему пространство H^*.

Еще одним следствием леммы Рисса является теорема о представлении полуторалинейных форм операторами.

Определение 4.1. *Функция $B\colon H \times H \to C$ называется полуторалинейной формой, если:*

(1) *B антилинейна по первому аргументу, т.е. $B(\lambda u + \mu v, w) = \overline{\lambda} B(u,w) + \overline{\mu} B(v,w)$;*
(2) *B линейна по второму аргументу, т.е. $B(u, \lambda v + \mu w) = \lambda B(u,v) + \mu B(u,w)$.*

Полуторалинейная форма ***ограничена****, если для любых $u, v \in H$*

$$|B(u,v)| \le C\|u\| \cdot \|v\| \text{ для некоторой константы } C > 0. \tag{4.1}$$

Предложение 4.1. *Пусть B – ограниченная полуторалинейная форма на H. Тогда существует единственный ограниченный линейный оператор $T\colon H \to H$ такой, что*

$$B(u,v) = \langle Tu, v \rangle \text{ для любых } u, v \in H.$$

Доказательство. Фиксируем вектор $u \in H$. Тогда из определения ограниченной полуторалинейной формы следует, что $B(u,\cdot)$ является непрерывным линейным функционалом на H. Поэтому по лемме Рисса найдется единственный элемент $\xi \in H$ такой, что $B(u,v) = \langle \xi, v \rangle$ для любого $v \in H$. Положим $Tu = \xi$. Ясно, что $\|Tu\| \le C\|u\|$, где C – константа из формулы (4.1). Кроме того, отображение T аддитивно и

$$\langle T(\lambda u), v \rangle = B(\lambda u, v) = \overline{\lambda} B(u,v) = \overline{\lambda} \langle Tu, v \rangle = \langle \lambda T u, v \rangle$$

т.е. T линейно. Единственность построенного оператора T очевидна. ■

Замечание 4.1. *Норма оператора T, построенного в доказанном предложении, совпадает с наименьшей константой C из неравенства (4.1).*

4.2. **Лемма Цорна.**

Определение 4.2. *Частичным порядком на множестве X называется семейство упорядоченных пар (x, y), где $x, y \in X$, обозначаемых через $x \prec y$, которое обладает следующими свойствами: 1. если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$; 2. всегда $x \prec x$; 3. если одновременно $x \prec y$ и $y \prec x$, то $x = y$.*

Множество X с частичным порядком называется частично упорядоченным. Порядок называется **линейным**, если для любых $x, y \in X$ выполняется по крайней мере одно из следующих условий: либо $x \prec y$, либо $y \prec x$. Множество с таким порядком называется **линейно упорядоченным**.

Пусть X есть частично упорядоченное множество и Y – его подмножество. Элемент $x \in X$ называется **верхней гранью** множества Y , если $y \prec x$ для любого $y \in Y$. Максимальным элементом частично упорядоченного множества X называется такой его элемент x, что условие $x \prec y$ для некоторого $y \in X$ влечет $y = x$.

Лемма 4.1 (Лемма Цорна)**.** *Пусть X – непустое частично упорядоченное множество такое, что любое его линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань. Тогда в X существует максимальный элемент.*

4.3. **Ортонормированные базисы.**

Определение 4.3. *Ортонормированным базисом в H называется полная ортонормированная система, т.е. ортонормированная система, которую нельзя расширить до содержащей ее ортонормированной системы.*

Теорема 4.2 (об ортонормированном базисе)**.** *Любое гильбертово пространство H обладает ортонормированным базисом.*

Доказательство. Рассмотрим множество S всех ортонормированных систем в H. Оно непусто, поскольку содержит, например, ортормированные системы, состоящие из единственного вектора вида $v/\|v\|$. Введем на S отношение частичного порядка: система $S_1 \prec$ система S_2, если $S_1 \subset S_2$.

Если $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть линейно упорядоченное подмножество в S, то $\cup_{\alpha\in A} S_\alpha$ также является ортонормированной системой из S, содержащей все S_α, и потому является верхней гранью линейно упорядоченного подмножества $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$. По лемме Цорна S содержит максимальный элемент, который и является ортонормированным базисом в H.

4.4. **Теорема Парсеваля.**

Прежде, чем переходить к формулировке этой теоремы, докажем следующий критерий сходимости попарно ортогональных векторов.

Предложение 4.2. *Пусть $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность попарно ортогональных векторов из H. Тогда выполнение любого из трех следующих условий влечет за собой выполнение остальных двух:*

(1) *ряд $\sum_{n=1}^\infty v_n$ сходится по норме H;*
(2) $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|^2 < \infty$*;*
(3) *ряд $\sum_{n=1}^\infty \langle v_n, u\rangle$ сходится при каждом $u \in H$.*

Доказательство. Так как $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ при $i \neq j$, то для любых $n, m, \leq m$, выполняется равенство:

$$\|v_n + \dots + v_m\|^2 = \|v_n\|^2 + \dots + \|v_m\|^2.$$

Отсюда следует, что условия (1) и (2) в этом случае эквивалентны. Если выполняется условие (2), то частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|^2$ образуют последовательность Коши в H, которая, ввиду полноты H, имеет предел. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем, что условие (3) в этом случае выполняется.

Предположим теперь, что выполнено условие (3). Рассмотрим последовательность линейных функционалов $f_n \in H^*$, задаваемых равенством

$$f_n(u) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, u\rangle, \quad u \in H.$$

По условию последовательность $\{f_n(u)\}_{n=1}^\infty$ сходится при каждом $u \in H$. Поэтому по теореме Банаха–Штейнгауза (она будет доказана позднее) последовательность норм $\{\|f_n(\cdot)\|\}_{n=1}^\infty$ ограничена. Но

$$\|f_n(\cdot)\| = \|v_1 + \dots + v_n\| = \big(\|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2\big)^{1/2}$$

Поэтому из условия (3) вытекает условие (2), а следовательно, и условие (1).

Теорема 4.3 (Теорема Парсеваля)**.** *Пусть $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Тогда любой элемент $v \in H$ представляется в виде*

$$v = \sum_{\alpha\in A} e_\alpha \langle e_\alpha, v\rangle, \tag{4.2}$$

причем

$$\|v\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle e_\alpha, v\rangle|^2 \tag{4.3}$$

Доказательство. По неравенству Бесселя для любого конечного подмножества $a \subset A$ выполняется соотношение
$$\sum_{\alpha\in a} |\langle v, e_\alpha\rangle|^2 \le \|v\|^2.$$
Отсюда следует, что $\langle v, e_\alpha\rangle \ne 0$ для не более, чем счетного множества индексов $\alpha \in A$. Действительно, обозначим через a_1 множество индексов $\alpha \in A$, для которых $|\langle v, e_\alpha\rangle| \ge 1$, через a_2 множество индексов $\alpha \in A$, для которых $1 > |\langle v, e_\alpha\rangle| \ge 1/2$ и т.д. Каждое из этих множеств конечно, в противном случае нарушалось бы предыдущее неравенство. Тогда множество $\cup_{n=1}^{\infty} a_n$ счетно и исчерпывает все множество индексов $\alpha \in A$, для которых $\langle v, e_\alpha\rangle \ne 0$. Занумеруем теперь через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ все индексы из A, для которых $\langle e_\alpha, v\rangle \ne 0$.Тогда последовательность частичных сумм
$$\sum_{j=1}^{n} |\langle e_{\alpha_j}, v\rangle|^2$$
монотонно возрастает с номером n, оставаясь ограниченной числом $\|v\|^2$. Поэтому при $n \to \infty$ она стремится к некоторому конечному пределу. Обозначим через v_n частичную сумму вида
$$v_n = \sum_{j=1}^{n} e_{\alpha_j}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle.$$
Тогда при $m > n$ будем иметь
$$\|v_n - v_m\|^2 = \| \sum_{j=n+1}^{m} e_{\alpha_j}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\langle e_{\alpha_j}, v\rangle|^2.$$
Тем самым, последовательность $\{v_n\}$ является последовательностью Коши, которая сходится к некоторому элементу $v_0 \in H$. При этом
$$\langle e_{\alpha_j}, v - v_0\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle e_{\alpha_j}, v - \sum_{k=1}^{n} e_{\alpha_k}\langle e_{\alpha_k}, v\rangle\right\rangle = \langle e_{\alpha_j}, v\rangle - \langle e_{\alpha_j}, v\rangle = 0,$$
при любом $j = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, если индекс α таков, что $\alpha \ne \alpha_j$ ни при каком j, то также
$$\langle e_\alpha, v - v_0\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle e_\alpha, v - \sum_{k=1}^{n} e_{\alpha_k}\langle e_{\alpha_k}, v\rangle\right\rangle = 0,$$
поскольку для такого α по построению $\langle e_\alpha, v\rangle = 0$. Следовательно, элемент $v - v_0$ ортогонален всем элементам e_α базиса S, откуда вытекает, ввиду максимальности S, что $v - v_0 = 0$, т.е.
$$v = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} e_{\alpha_j}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle,$$
что доказывает формулу (4.2).

Кроме того, имеем следующую цепочку равенств
$$0 = \lim_{n\to\infty}\left\| v - \sum_{j=1}^{n} e_{\alpha_j}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\langle v - \sum_{j=1}^{n} e_{\alpha_j}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle, v - \sum_{j=1}^{n} e_{\alpha_j}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle\right\rangle =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\|v\|^2 - \sum_{j=1}^{n}\langle v, e_{\alpha_j}\rangle\langle e_{\alpha_j}, v\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle\langle v, e_{\alpha_j}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\langle e_{\alpha_j}, v\rangle\langle v, e_{\alpha_j}\rangle\right\} =$$
$$= \|v\|^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} |\langle e_{\alpha_j}, v\rangle|^2 = \|v\|^2 - \sum_{\alpha\in A} |\langle e_\alpha, v\rangle|^2,$$

что доказывает формулу (4.3). ■

Определение 4.4. *Ряд, задаваемый формулой (4.2), называется рядом Фурье вектора v по базису S, а его коэффициенты – коэффициентами Фурье вектора v относительно базиса S. Равенство (4.3) называется равенством Парсеваля.*

4.5. **Ортогонализация Грама–Шмидта.** Ортогонализацией Грама–Шмидта называется
конструкция, позволяющая построить по любой заданной последовательности линейно независимых векторов ортонормированную систему. Допустим, что нам дана последовательность $u_1, u_2, \ldots$, состоящая из линейно независимых векторов. Положим $w_1 = u_1$ и $v_1 = w_1/\|w_1\|$. Далее рассмотрим векторы $w_2 = u_2 - v_1\langle v_1, u_2\rangle$ и $v_2 = w_2/\|w_2\|$. Продолжая указанный процесс построения, на n-м шаге построим векторы

$$w_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} v_j \langle v_j, u_n\rangle \quad \text{и} \quad v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}.$$

Иными словами, на n-м шаге вектор u_n проектируется на подпространство, натянутое на ранее построенные векторы $v_1, \ldots, v_{n-1}$, в результате чего разность w_n – вектор, ортогональный линейной оболочке векторов $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Литература к лекции 4: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

5. Лекция. Сепарабельные гильбертовы пространства и тензорные произведения

5.1. Сепарабельные гильбертовы пространства.

Определение 5.1. *Метрическое пространство называется сепарабельным, если оно обладает счетным плотным подмножеством.*

Теорема 5.1. *Гильбертово пространство H сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетный ортонормированный базис. Если этот базис состоит из N векторов, то H изоморфно $\mathbb{C}^N$. Если он состоит из счетного набора векторов, то H изоморфно ℓ^2.*

Доказательство. Допустим сначала, что H сепарабельно и $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное плотное подмножество в H. Выбрасывая, если нужно, из этого подмножества некоторые векторы, можно считать, что подмножество $\{v_n\}$ состоит из линейно независимых векторов, линейная оболочка которых (т.е. совокупность конечных линейных комбинаций) плотна в H. Применяя к последовательности $\{v_n\}$ процесс ортогонализации Грама–Шмидта, построим из нее счетный ортонормированный базис в H.

Обратно, если $S = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H, то по теореме Парсеваля множество конечных линейных комбинаций векторов e_n плотно в H. То же самое верно и для множества конечных линейных комбинаций этих векторов с рациональными коэффициентами, а это множество уже счетно. Тем самым, H сепарабельно. Пусть, теперь, H сепарабельно и $S = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его счетный ортонормированный базис. Рассмотрим отображение

$$U: \quad H \to \ell_2, \qquad v \mapsto \{\langle e_n, v\rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из теоремы Парсеваля следует, что это отображение корректно определено и сюръективно, а равенство Парсеваля показывает, что оно унитарно, т.е. U – изоморфизм H на ℓ_2. Если базис S состоит из конечного числа N элементов, то это же рассуждение показывает, что H изоморфно $\mathbb{C}^N$. ■

Пример 5.1 (Ряд Фурье периодической функции.). *Рассмотрим в качестве гильбертова пространства $H = L^2(0, 2\pi)$. Выберем в нем ортонормированный базис, задаваемый функциями*

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы удостовериться в том, что $\{\varphi_n\}$ действительно образуют ортонормированный базис, достаточно проверить полноту этой системы (ее ортонормированность очевидна). Покажем, что если некоторая функция $g \in L^2(0, 2\pi)$ ортогональна всем функциям φ_n, т.е. $\langle e^{inx}, g\rangle = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $g = 0$. Заметим, что из условия ортогональности следует, что g ортогональна всем периодическим непрерывно дифференцируемым функциям $\varphi \in C^1_{per}[0, 2\pi]$. Действительно, для таких функций φ их ряд Фурье

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx,$$

равномерно сходится к функции φ, поэтому его можно почленно интегрировать, откуда следует, что $\langle \varphi, g\rangle = 0$. Но, как легко показать, функции из $C^1_{per}[0, 2\pi]$ плотны в $L_2(0, 2\pi)$, поэтому функция g ортогональна всему пространству $L_2(0, 2\pi)$. Следовательно, $g = 0$. Итак, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ есть ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, 2\pi)$, поэтому из теоремы Парсеваля следует, что ряд Фурье любой функции из $L_2(0, 2\pi)$ сходится к ней по норме этого пространства.

5.2. **Тензорные произведения.** Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Будем временно обозначать элементы их прямой суммы $H_1 \oplus H_2$ через $u_1 \oplus u_2$, где $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$. Для $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$ обозначим через $v_1 \otimes v_2$ билинейную форму на пространстве $H_1 \oplus H_2$, задаваемую равенством

$$(v_1 \otimes v_2)(u_1 \oplus u_2) = \langle v_1, u_1 \rangle \langle v_2, u_2 \rangle, \text{ где } u_1 \in H_1, \quad u_2 \in H_2.$$

Определим скалярное произведение на формах указанного вида посредством

$$\langle v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2' \rangle = \langle v_1, v_1' \rangle \langle v_2, v_2' \rangle.$$

Обозначим через E линейную оболочку (т.е. множество конечных линейных комбинаций) форм такого вида и продолжим на него введенное скалярное произведение по линейности. Множество E называется алгебраическим тензорным произведением пространств H_1 и H_2.

Покажем, что указанное скалярное произведение корректно определено на E, т.е. не зависит от представления вектора из E в виде конечной линейной комбинации форм вида $v_1 \otimes v_2$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $w = \sum_{i=1}^N c_i(u_i \otimes v_i)$ – конечная линейная комбинация, представляющая нулевую форму на $H_1 \oplus H_2$, то ее скалярное произведение с любой формой z из E равно нулю. Так как форма $z \in E$, то она представляется в виде

$$z = \sum_{k=1}^n a_k (x_k \otimes y_k), \text{ где } x_k \in H_1, \quad y_k \in H_2.$$

Тогда получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}\langle w, z \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N a_k \overline{c}_i \langle u_i \otimes v_i, x_k \otimes y_k \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N a_k \langle c_i u_i, x_k \rangle \langle v_i, y_k \rangle = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N a_k (c_i u_i \otimes v_i)(x_k \oplus y_k) = \sum_{k=1}^n a_k w(x_k \oplus y_k) = 0.\end{aligned}$$

где $w(x_k \oplus y_k) = 0$, поскольку w по условию задает нулевую форму на $H_1 \oplus H_2$. Покажем теперь, что построенное скалярное произведение на E положительно определено. Пусть $w = \sum_{i=1}^N c_i(u_i \otimes v_i)$ – произвольная форма из E. Векторы $\{u_i\}_{i=1}^N$ и $\{v_i\}_{i=1}^N$ порождают линейные подпространства $U \subset H_1$ и $V \subset H_2$, соответственно. Выберем в этих подпространствах ортонормированные базисы $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ соответственно и разложим векторы u_i и v_i по этим базисам. В результате получим

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j, \qquad v_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \psi_j,$$

так что

$$w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} (\varphi_i \otimes \psi_j)$$

с некоторыми коэффициентами c_{ij}. Тогда

$$\begin{aligned}\langle w, w \rangle = \left\langle \sum_{i,j} c_{ij}(\varphi_i \otimes \psi_j), \sum_{k,l} c_{kl}(\varphi_k \otimes \psi_l) \right\rangle = \\ = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \overline{c}_{ij} c_{kl} \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle \langle \psi_j, \psi_l \rangle = \sum_{ij} |c_{ij}|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Кроме того, равенство $\langle w, w \rangle = 0$, эквивалентно тому, что все $c_{ij} = 0$, т.е. $w = 0$. Следовательно, скалярное произведение положительно определено.

Определение 5.2. *Гильбертово тензорное произведение $H_1 \otimes H_2$ есть пополнение алгебраического тензорного произведения E по введенному скалярному произведению.*

Предложение 5.1. *Если $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно, то $\{u_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в тензорном произведении $H_1 \otimes H_2$.*

Доказательство. Так как система $\{u_i \otimes v_j\}$ является, очевидно, ортонормированной в $H_1 \otimes H_2$, то достаточно показать, что замкнутая линейная оболочка S элементов $\{u_i \otimes v_j\}$ содержит алгебраическое тензорное произведение E. Пусть форма $w = u \otimes v \in E$, где $u \in H_1$, $v \in H_2$. Так как $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ являются базисами в пространствах H_1 и H_2 соответственно, то

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{\infty} b_j v_j,$$

причем $\sum_i |a_i|^2 < \infty$ и $\sum_i |b_i|^2 < \infty$, а тогда и $\sum_{ij} |a_i b_j| < \infty$. Поэтому по теореме Парсеваля ряд

$$\sum_{i,j} a_i b_j (u_i \otimes v_j)$$

сходится к некоторому вектору из S. Но этот вектор должен совпадать с w, поскольку

$$\left\| u \otimes v - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_i b_j (u_i \otimes v_j) \right\| \to 0$$

при $N_1, N_2 \to \infty$. Следовательно, $w \in S$. ■

Литература к лекции 5: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

6. Банаховы пространства

6.1. **Определение и примеры банаховых пространств.**

Определение 6.1. *Полное нормированное пространство называется банаховым.*

Пример 6.1 (Пространство $L^\infty(\mathbb{R})$)**.** *Пространство $L^\infty(R)$ состоит из классов эквивалентности (относительно меры Лебега) измеримых функций f на вещественной прямой $\mathbb{R}$, для которых существует константа $C > 0$ такая, что $|f(x)| < C$ почти всюду по мере Лебега. Наименьшая из таких констант C называется нормой f и обозначается $\|f\|_\infty$.*

Пространство $L^\infty(\mathbb{R})$ является банаховым с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Оно содержит подпространство $C_b(\mathbb{R})$ ограниченных непрерывных функций на R и ограничение нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $C_b(\mathbb{R})$ совпадает с обычной sup-нормой

$$\|f\|_{C_b(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

на $C_b(\mathbb{R})$. Очевидно, подпространство $C_b(\mathbb{R})$ плотно в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим подпространство $C_{\text{fin}}(\mathbb{R})$, состоящее из непрерывных функций на R с компактными носителями. Это нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$, которое, однако, не является полным. Его пополнение по норме $\|\cdot\|_\infty$ совпадает с пространством $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности.

Пример 6.2 (Пространство $L^p(M, d\mu)$.)**.** *Пусть $(M, \mathscr{R}, \mu)$ – пространство с мерой. При $p \geq 1$ обозначим через $L^p(M, d\mu)$ множество классов эквивалентности (относительно меры μ) измеримых функций на M, удовлетворяющих условию*

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Это пространство обладает следующими свойствами:

(1) если $f, g \in L^p(M, d\mu)$, то $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|G\|_p$ (неравенство Минковского);
(2) если p, q, r – положительные числа ≥ 1, связанные соотношением $1/r = 1/p + 1/q$, то произведение fg функций $f \in L^p(M, d\mu)$ и $g \in L^q(M, d\mu)$ принадлежит пространству $L^r(M, d\mu)$ и $\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$ (неравенство Гельдера);
(3) пространство $L^p(M, d\mu)$ полно (теорема Рисса-Фишера).

Доказательство теоремы Рисса-Фишера. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность Коши в L^p. Выберем подпоследовательность такую, что $\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$. Введем

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|.$$

Последовательность $\{g_m\}$ монотонна. Поскольку $\|g_m\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n(x) - f_{n+1}(x)\|_p \leq 1$, то предел этой последовательности существует и удовлетворяет $g_\infty \in L^p$. Но тогда $|g_\infty(x)| < \infty$ почти всюду. Отсюда последовательность $f_{m+1}(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^m (f_n(x) - f_{n+1}(x))$ сходится поточечно почти всюду к некоторой функции $f(x)$. При этом по неравенству Минковского $\|f_{m+1}\|_p \leq \|f_1\|_p + \|g_\infty\|_p$, так что по теореме о мажорированной сходимости $f \in L^p$. ■

Из приведенных свойств вытекает, что $L^p(M, d\mu)$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_p$.

Пример 6.3 (Пространство ℓ_p.). *Пусть $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает последовательность комплексных чисел. По аналогии с пространствами функций можно рассмотреть следующие пространства последовательностей:*

$$\begin{aligned}
\ell^{\infty} &= \Big\{x: \quad \|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n| < \infty\Big\};\\
\ell^{p} &= \Big\{x: \quad \|x\|_{p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\Big\}, \quad p \geq 1,\\
c_0 &= \Big\{x: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0\Big\} \subset \ell^{\infty},\\
c_{\mathrm{fin}} &= \Big\{x: \quad x_n = 0 \textit{ для всех } n, \textit{ кроме конечного числа.}\Big\}
\end{aligned}$$

Очевидно, $c_{\mathrm{fin}} \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell_{\infty}$. Нетрудно доказать следующие свойства этих пространств. Пространства ℓ_{∞} и c_0 банаховы с нормой $\|\cdot\|_{\infty}$. Пространство ℓ_p банахово с нормой $\|\cdot\|_p$. Пространство c_{fin} плотно в ℓ_p (по норме $\|\cdot\|_p$, $p < \infty$) и плотно в c_0 (по норме $\|\cdot\|_{\infty}$). Кроме того, множество элементов c_{fin}, состоящих лишь из рациональных чисел, плотно в ℓ_p и в c_0. Поскольку это множество счетно, ℓ_p и c_0 сепарабельны. Пространство ℓ_{∞} не сеперабельно.

6.2. **Пространство ограниченных линейных операторов.** Обозначим через $B(X,Y)$ векторное пространство ограниченных линейных операторов $T: \quad X \to Y$, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Введем в $B(X,Y)$ операторную норму, полагая

$$\|T\| = \sup_{v\in X\setminus 0} \frac{\|Tv\|_Y}{\|v\|_X}.$$

Это превращает $B(X,Y)$ в нормированное пространство.

Предложение 6.1. *Пространство $B(X,Y)$ банахово, если Y банахово.*

Доказательство. Покажем, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность Коши в $B(X,Y)$, то существует ограниченный линейный оператор $T: X \to Y$ такой, что $\|T_n - T\| \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого $v \in X$ последовательность $\{T_n v\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши в полном пространстве Y . Поэтому последовательность векторов $\{T_n v\}$ сходится при $n \to \infty$ к некоторому вектору $w \in Y$. Положим $Tv := w$. Определенный таким образом оператор T, очевидно, линеен. Покажем, что он также ограничен. Действительно, так как $\{T_n\}$ является последовательностью Коши в нормированном пространстве $B(X,Y)$, то она ограничена. Следовательно, найдется константа $C > 0$ такая, что при любом n справедлива оценка

$$\sup_{\|v\|\leq 1} \frac{\|T_n v\|}{\|v\|} = \|T_n\| \leq C,$$

откуда $\|T_n v\| \leq C$ при любом n и любом v с нормой $\|v\| \leq 1$. Следовательно, $\|Tv\| \leq C$ при любом v с нормой $\|v\| \leq 1$, т.е. оператор T ограничен.

Для того, чтобы показать, что $\|T - T_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, заметим, что

$$\|(T - T_n)v\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)v\|,$$

поэтому

$$\frac{\|(T - T_n)v\|}{\|v\|} = \lim_{m\to\infty} \frac{\|(T_m - T_n)v\|}{\|v\|} \leq \lim_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|,$$

т.е. $\|T - T_n\| \leq \lim_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|$. Так как правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой при достаточно большом n, то $\|T - T_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. ∎

Определение 6.2. *Ограниченный линейный оператор $T : X \to Y$ из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется изоморфизмом, если T является биективным отображением с ограниченным обратным. Если этот оператор к тому же сохраняет норму, то он называется изометрией.*

Например, мы показали ранее, что любое сепарабельное гильбертово пространство изометрично ℓ^2.

Определение 6.3. *Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном пространстве X называются эквивалентными, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что*

$$C_1\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C_2\|v\|_1.$$

Например, все следующие нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны:

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2},$$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max\{|x_i|\}_{i=1}^n.$$

С другой стороны, пополнение пространства c_{fin} по норме $\|\cdot\|_1$ совпадает с c_0, а его пополнение по норме $\|\cdot\|_p$ есть ℓ^p.

6.3. **Сопряженное пространство, определение и примеры.** В Предложении 6.1 из предыдущего параграфа было показано, что пространство $B(X,Y)$ ограниченных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y само является банаховым. В случае, когда $Y = \mathbb{C}$, пространство $B(X,\mathbb{C})$ состоит из ограниченных линейных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$ и называется сопряженным пространством X^* к пространству X. Напомним, что норма ограниченного линейного функционала $f \in X^*$ определяется формулой

$$\|f\| = \sup_{v\in X,\,\|v\|\le 1} |f(v)|.$$

Пример 6.4 (Пространство L^p.)**.** *Пусть $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и $g \in L^q(\mathbb{R})$, то по неравенству Гельдера $fg \in L_1(\mathbb{R})$ и потому определен интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.$$

Сопоставим функции $g \in L^q(\mathbb{R})$ линейный функционал

$$G(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$

на пространстве $L_p(\mathbb{R})$. По неравенству Гельдера G является ограниченным линейным функционалом на $L^p(\mathbb{R})$ с нормой, не превосходящей $\|g\|^q$.

Обратное утверждение также верно: любой ограниченный линейный функционал на $L^p(\mathbb{R})$ имеет вид $f \mapsto G(f)$ для некоторой функции $g \in L^q(\mathbb{R})$. Кроме того, разным функциям из $L^q(\mathbb{R})$ отвечают различные функционалы на $L^p(\mathbb{R})$, т.е. отображение

$$L^q(\mathbb{R}) \ni g \mapsto G \in L^p(\mathbb{R})^*$$

устанавливает линейную изометрию пространства $L^q(\mathbb{R})$ на пространство $L^p(\mathbb{R})^*$. Иначе говоря, $L^p(\mathbb{R})^* = L^q(\mathbb{R})$. В случае $p = 2$ имеем $q = 2$ и $L^2(\mathbb{R})^* = L^2(\mathbb{R})$, т.е. пространство $L^2(\mathbb{R})$ сопряжено самому себе. Из леммы Рисса следует, что это свойство выполняется для любых гильбертовых пространств.

Пример 6.5 (Пространства c_0 и ℓ^p.). *Напомним, что пространство c_0 состоит из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел, стремящихся к нулю. Если последовательность $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит ℓ^1, то ей можно сопоставить линейный функционал*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$$

на пространстве c_0 с нормой, равной $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Покажем, что все ограниченные линейные функционалы на c_0 имеют указанный вид. Действительно, пусть $f \in c_0^*$ и e^n – вектор из c_0, у которого на n-ом месте стоит 1, а на остальных местах нули. Положим

$$f_n := f(e^n)$$

и

$$S_N = {\sum_{n=1}^{N}}' \frac{|f_n|}{f_n} e^n,$$

где “штрих” у знака суммы означает, что в ней нужно опустить все члены с $f_n = 0$. Иначе говоря,

$$S_N = \left(\frac{|f_1|}{f_1}, \frac{|f_2|}{f_2}, \dots \frac{|f_N|}{f_N}, 0 \dots \right)$$

(где опущены члены с $f_n = 0$). Тогда $S_N \in c_0$ и $\|S_N\|_{c_0} = 1$. Так как

$$f(S_N) = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$$

и

$$|f(S_N)| \le \|S_N\|_{c_0} \|f\|_{c_0^*} = \|f\|_{c_0^*},$$

то

$$\|f\|_{c_0^*} \ge \sum_{n=1}^{N} |f_n|.$$

Следовательно, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \le \|f\|_{c_0^*},$$

откуда $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$, т.е.

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$$

является корректно определенным ограниченным линейным функционалом на пространстве c_0. Более того, F совпадает с f на конечных линейных комбинациях векторов e^n. Так как такие линейные комбинации плотны в c_0, то $F = f$. Следовательно, любой ограниченный линейный функционал из c_0^* порождается некоторым элементом из ℓ^1. При этом нормы в c_0^* и ℓ^1 совпадают, т.е. $c_0^* = \ell^1$. Аналогичное рассуждение показывает, что $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

6.4. **Рефлексивные банаховы пространства.** Так как пространство X^*, сопряженное к банахову пространству X, снова является банаховым, то и второе сопряженное пространство $(X^*)^* = X^{**}$ также банахово. В Примере 6.5 из предыдущего параграфа мы показали, что $c_0^* = \ell^1$, а $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, откуда следует, что вторым сопряженным пространством к пространству c_0 является пространство $\ell^\infty \ni c_0$.

Предложение 6.2. *Пусть X – банахово пространство. Сопоставим вектору $v \in X$ линейный функционал v^* на пространстве X^* (т.е. $v^* \in X^{**}$), задаваемый формулой*

$$X^* \ni f \mapsto v^*(f) := f(v).$$

Отображение $v \mapsto v^*$ задает изометрию пространства X на некоторое подпространство в X^{**}.

Доказательство. Так как

$$|v^*(f)| = |f(v)| \le \|f\|_{X^*}\|v\|_X;$$

то v^* является ограниченным линейным функционалом на X^* с нормой, не превосходящей $\|v\|_X$: $\|v^*\|_{X^{**}} \le \|v\|_X$. Из теоремы Хана–Банаха (которую мы докажем на следующей лекции) следует, что для заданного $v \in X$ всегда существует функционал $f_0 \in X^*$ такой, что

$$\|f_0\|_{X^*} = 1 \text{ и } f_0(v) = \|v\|_X.$$

Поэтому

$$\|v^*\|_{X^{**}} = \sup_{f\colon \|f\|_{X^*}=1} |v^*(f)| \ge |v^*(f_0)| = \|v\|_X;$$

что вместе с доказанным выше противиположным неравенством дает $\|v^*\|_{X^{**}} = \|v\|_X$. Следовательно, отображение $v \mapsto v^*$ является изометрией X на образ этого отображения в пространстве X^{**}. ■

Определение 6.4. *Если отображение $X \to X^{**}$, $v \mapsto v^*$, построенное в предыдущем Предложении, сюръективно, т.е. X изометрично X^{**}, то банахово пространство X называется рефлексивным.*

Например, пространства $L^p(\mathbb{R})$ с $1 < p < \infty$ рефлексивны, а пространство c_0 не рефлексивно, поскольку $c_0^{**} = \ell^\infty \supset c_0$.

Литература к лекции 6: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

7. Лекция. Теорема Хана–Банаха.

Здесь мы доказываем один из основных результатов функционального анализа – теорему Хана–Банаха. Доказательство нам придется делать в два шага: сначала мы докажем эту теорему для вещественного векторного пространства, а потом обобщим ее на комплексное.

7.1. **Теорема Хана–Банаха, вещественный случай.**

Теорема 7.1. *Пусть X – вещественное векторное пространство, p – вещественная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in [0,1]$. Предположим, что λ – линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x) \le p(x)$ для всех $x \in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ, определенный на X, такой, что $\Lambda(x) \le p(x)$ для всех $x \in X$ и $\Lambda(x) = \lambda(x)$ для всех $x \in Y$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z \in X$, но $z \notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X.

Пусть $\widetilde{Y}$ – подпространство, натянутое на Y и z. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – продолжение λ на $\widetilde{Y}$, оно будет описано, коль скоро мы определим $\widetilde{\lambda}(z)$, т.к.

$$\widetilde{\lambda}(uz + y) = u\widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и пусть $\alpha, \beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) = \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) &= (\alpha+\beta)\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\Big) \le \\ &\le (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2 + \beta z)\Big) \le \\ &\le \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).\end{aligned}$$

Значит, для всех $\alpha, \beta > 0$ и $y_1, y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}\big[-p(y_1 - \alpha z) + \lambda(y_1)\big] \le \frac{1}{\beta}\big[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)\big],$$

а потому существует такое вещественное a, что

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}\big[-p(y - \alpha z) + \lambda(y)\big] \le a \le \inf_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}\big[p(y + \alpha z) - \lambda(y)\big].$$

Положим тогда $\widetilde{\lambda}(z) = a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\widetilde{\lambda}(x) \le p(x)$ при всех $x \in \widetilde{Y}$. Итак, мы показали, что λ за один шаг может быть продолжено на одно измерение.

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Цорна. Пусть $\mathcal{E}$ – набор расширений e функционала λ, удовлетворяющих условию $e(x) \le p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в $\mathcal{E}$ частичное упорядочение, положив $e_1 \prec e_2$, если e_2 определено на большем множестве, чем e_1 и $e_2(x) = e_1(x)$ там, где они оба определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$; пусть X_α – то подпространство, на котором определено e_α. Определим e на $\cup_{\alpha\in A} X_\alpha$, положив $e(x) = e_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. Очевидно, что $e_\alpha \prec e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$ имеет верхнюю грань. В силу леммы Цорна $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент Λ, определенный на некотором множестве X' и удовлетворяющий условию $\Lambda(x) \le p(x)$ при $x \in X'$. Но X' должно совпадать со всем X, так как в противном случае мы могли бы продолжить Λ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это противоречит максимальности Λ, должно быть $X = X'$. Значит расширение Λ определено всюду.

7.2. **Теорема Хана–Банаха, комплексный случай.**

Теорема 7.2. *Пусть X – комплексное векторное пространство, p – вещественная положительная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$ при любых $x, y \in X$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\alpha| + |\beta| = 1$. Пусть λ – комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал Λ, определенный на X, удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in X$ и такой, что $\Lambda(x) = \lambda(x)$ при $x \in Y$.*

Доказательство. Положим $\ell(x) = \mathrm{Re}\{\lambda(x)\}$, так что ℓ – вещественно линейный функционал на Y и, поскольку

$$\ell(ix) = \mathrm{Re}\{\lambda(ix)\} = \mathrm{Re}\{i\lambda(x)\} = -\operatorname{Im}\lambda(x),$$

то $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Т.к. ℓ – вещественно линеен и $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ при любом $\alpha \in [0,1]$, то существует вещественно линейное расширение L на все X, удовлетворяющее условию $L(x) \leq p(x)$. Положим $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$. По построению это – вещественно линейный функционал, являющийся расширением функционала λ. Но поскольку $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = i\Lambda(x)$, то Λ – комплексно линеен. Осталось доказать, что $|\Lambda(x)| \leq p(x)$. Заметим, что $p(\alpha x) \leq p(x)$ для любого α такого, что $|\alpha| = 1$. Обозначим $\theta = \mathrm{Arg}(\Lambda(x))$. Тогда в силу равенства $\mathrm{Re}\,\Lambda = L$, имеем:

$$\begin{aligned}|\Lambda(x)| &= e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \mathrm{Re}\,\Lambda(e^{-i\theta}x) = \\ &= L(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) \leq p(x),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 7.1. *Пусть X – нормированное линейное пространство, Y – его подпространство, линейный функционал $\lambda \in Y^*$. Тогда существует линейный функционал $\Lambda \in X^*$, продолжающий λ и удовлетворяющий $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$.*

Доказательство. Следует непосредственно из теоремы Хана–Банаха, если положить $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|y\|$.

Следствие 7.2. *Пусть y – элемент нормированного линейного пространства X. Тогда существует ненулевой линейный функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что $\Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|$.*

Доказательство. Пусть Y – подпространство, натянутое на y. Положим $\lambda(ay) = a\|y\|$. По предыдущему следствию существует функционал Λ, расширяющий λ на все X с нормой $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1$, где последнее равенство следует по определению λ. Но $\Lambda(y) = \|y\|$, откуда следует утверждение этого Следствия.

Литература к лекции 7: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

8. Лекция 8

8.1. **Пространства $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$.** Банаховы пространства обладают многими свойствами эвклидовых: это векторные пространства, норма в них опеределяет понятие расстояния, а всякая последовательность Коши имеет предел. Хороший пример использования этих пространств дает теория обобщенных функций, которую мы кратко рассмотрим здесь. В описании обобщенных функций банаховы пространства возникают следующим образом. Введем пространство $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (для простоты изложения мы рассматриваем функции одной переменной) бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой обратной степени x (говорят также: быстрее любого полинома). Введем в $\mathscr{S}$ счетное число норм, определенных как

$$\|\phi\|^{(p)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \alpha\le p}} (1+x^2)^{p/2}|\partial_x^\alpha \phi(x)|, \quad p = 0, 1, \dots. \tag{8.1}$$

Очевидно, что

$$\|\phi\|^{(0)} \le \|\phi\|^{(1)} \le \|\phi\|^{(2)} \le \dots. \tag{8.2}$$

Зададим сходимость в $\mathscr{S}$ следующим образом:

Определение 8.1. *Последовательность функций ϕ_1, ϕ_2, $\dots$ из $\mathscr{S}$ сходится к нулю, $\phi_k \to 0$ в $\mathscr{S}$ при $k \to \infty$, если для всех $p = 0, 1, \dots$ последовательности $\|\phi_k\|^{(p)} \to 0$ при $k \to \infty$.*

Иными словами: $\phi_k \to 0$ в $\mathscr{S}$ при $k \to \infty$, если $x^\beta \partial_x^\alpha \phi(x)$ сходится к нулю при всех $\beta, \alpha = 0, 1, \dots$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathscr{S}_p$ означает пополнение $\mathscr{S}$ по p-ой норме. Каждое $\mathscr{S}_p$ – банахово пространство и справедливы вложения:

$$\mathscr{S}_0 \supset \mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_2 \supset \dots,$$

причем каждое вложение $\mathscr{S}_{p+1} \subset \mathscr{S}_p$ непрерывно в силу (8.2). Можно доказать, что это вложение вполне непрерывно (компактно), т.е. из всякого бесконечного ограниченного множества в $\mathscr{S}_{p+1}$ можно выбрать последовательность, сходящуюся в $\mathscr{S}_p$.

Теорема 8.1. *$\mathscr{S}$ – полное пространство и $\mathscr{S} = \bigcap_{p\ge 0} \mathscr{S}_p$.*

Доказательство. Пусть f_k –последовательность Коши по каждой из норм $\|\cdot\|^{(p)}$, что означает что $x^p \partial_x^\alpha f_k(x) \to g_{p,\alpha}(x)$ при $k \to \infty$ и всех $p, \alpha = 0, 1, \dots$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Обозначим $g = g_{0,0}$ и докажем, что $g(x)$ непрерывно дифференцируема и $g' = g_{0,1}$. Действительно,

$$f_k(x) = f_k(0) + \int_0^x dt\, f_k'(t),$$

и ввиду равномерности стремления $f_k' \to g_{0,1}$ имеем

$$g(x) = g(0) + \int_0^x dt\, g_{0,1}(t),$$

так что $g \in C^1$ и $g = g_{0,1}$. Повторяя этот процесс, получаем, что $g_{p,\alpha}(x) = x^p \partial_x^\alpha g(x)$ и в топологии пространства $\mathscr{S}$ предел $\lim_{k\to\infty} f_k = g$. Теорема доказана.

Определение 8.2. *Топологически сопряженное пространство к $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (т.е. множество непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$), обозначаемое как $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, называется пространством обобщенных функций (распределений) умеренного роста.*

В теории обобщенных функций для значения обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'$ на основной функции $\varphi \in \mathscr{S}$ принято обозначение

$$(f, \varphi),$$

причем в отличие от определения скалярного произведения здесь имеется линейность по обоим аргументам.

Сходимость в пространстве $\mathscr{S}'$ определяется как **слабая** сходимость: последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{S}'$ называется сходящейся к обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'$ (обозначение: $f_n \to f$ в $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$), если для любого $\varphi \in \mathscr{S}$ выполнено

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Ниже мы покажем, что для того, чтобы линейный функционал f на $\mathscr{S}$ был непрерывен, должна существовать норма $\|\cdot\|^{(p)}$ такая, что $|(f,\varphi)| \leq C\|\varphi\|^{(p)}$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$. В обратную сторону это очевидно. Действительно, если имеется последовательность Коши $\{\varphi_k\}$ в $\mathscr{S}$, то она является последовательностью Коши для любой нормы $\|\cdot\|^{(p)}$. А тогда и (f, φ_k) в силу этого неравенства – последовательность Коши.

8.2. **Примеры обобщенных функций. Пример 1. Регулярные обобщенные функции.** Пусть $g \in \mathscr{S}$. Определим функционал $g(\cdot)$ на $\mathscr{S}$ как

$$g(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\varphi(x). \tag{8.3}$$

Он, очевидно, линеен и непрерывен, поскольку

$$|g(\varphi)| \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\varphi\|^{(0)}.$$

Таким образом мы получаем, что $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$. Аналогично можно показать, что $L^q \subset \mathscr{S}'$. Обобщенные функции, заданные интегралом (8.3), называются регулярными. Таким образом, с учетом обозначения введенного выше, имеем

$$(g, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\varphi(x). \tag{8.4}$$

Один из наиболее известных примеров регулярной обобщенной функции – функция Хевисайда:

$$(\theta, \varphi) = \int\limits_{0}^{+\infty} dx\, \varphi(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \theta(x)\varphi(x), \tag{8.5}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Главное значение интеграла в смысле Коши. Определим

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} dx \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Этот интеграл конечен, поскольку

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int\limits_{0}^{\infty} dx \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}.$$

Более того,

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \le \frac{1}{x}\int\limits_{-x}^{x} dt\,|\varphi'(t)| \le 2\|\varphi\|^{(1)}.$$

Так что

$$\left|\left(\frac{1}{x},\varphi\right)\right| \le 2\int\limits_{0}^{1} dx\|\varphi\|^{(1)} + 2\left|\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}(x\varphi(x))\right| \le 4\|\varphi\|^{(1)}.$$

Пример 3. Дельта-функция. Прежде всего необходимо помнить, что дельта-функция (Дирака) есть не функция, а функционал, заданный формулой

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0), \tag{8.6}$$

где $\varphi(x)\in\mathscr{S}$. Это равенство обычно записывают в виде

$$\int dx\,\delta(x)\varphi(x)=\varphi(0), \tag{8.7}$$

но легко видеть, что функции $\delta(x)$ такой, что выполнено (8.7) не существует. Поэтому (8.7) есть просто формальная запись (8.6). Линейность и непрерывность этого функционала легко следуют из (8.6).

Литература к лекции 8:

М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”;

В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”;

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I;

В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.

9. Лекция 9

9.1. Операции над обобщенными функциями. Замена переменных. Пусть даны локально интегрируемая функция $f(x)$ и бесконечно дифференцируемая строго монотонно возрастающая функция $a(x)$, отображающая бесконечность в бесконечность. Тогда для любой основной функции $\phi(x)$

$$\int dx\, f(a(x))\phi(x) = \int dy\, (a^{-1}(y))' f(y)\phi(a^{-1}(y))$$

где $y = a(x)$ и a^{-1} означает обратную функцию. Легко видеть, что произведение

$$(a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))$$

также является основной функцией (в пространстве $\mathscr{S}$ следует потребовать роста $a(x)$ на бесконечности). Поэтому каждой обобщенной функции f мы сопоставляем обобщенную функцию $f(a)$ по правилу:

$$(f(a), \phi) = (f, (a^{-1})'\phi(a^{-1}))$$

В частности

$$(\delta(a), \phi) = (a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))|_{y=0}.$$

Пусть x_0 – единственный ноль функции $a(x)$, $a(x_0) = 0$. Тогда $\delta(a(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{a'(x_0)}$. В некоторых случаях можно отказаться от требования монотонности. Например, если все нули функции $a(x)$ простые, то можно показать, что

$$\delta(a(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|a'(x_j)|},$$

где суммирование ведется по всем нулям x_j функции $a(x)$.

Мультипликаторы и свертка обобщенных функций с основными. Общее определение произведения обобщенных функций невозможно. Однако, если регулярная функция $a(x)$ такова, что для любой основной функции $\phi(x)$ произведение $a(x)\phi(x)$ также является основной функцией, причем для любой сходящейся последовательности $\phi_n(x)$ последовательность $a(x)\phi_n(x)$ также является сходящейся, то умножение обобщенной функции на такую регулярную определяется формулой

$$(af, \phi) = (f, a\phi), \tag{9.1}$$

что дает линейный и непрерывный (в силу сказанного выше) функционал на пространстве основных функций, а функция $a(x)$ называется **мультипликатором**. Например, мультипликаторами являются все бесконечно дифференцируемые функции $a(x)$, растущие на бесконечности не быстрее полинома. В частности из (9.1) следует, что

$$x\delta(x) = 0. \tag{9.2}$$

Если $\phi(x)$ – основная функция, то для любого конечного y функция $\phi(x - y)$ также является основной в том же пространстве. Поэтому свертку $(\phi * f)(x)$ основной функции с обобщенной можно определить как

$$(\phi * f)(y) = (f, \phi(\cdot - y)), \tag{9.3}$$

что, очевидно, дает обычную бесконечно дифференцируемую функцию.

9.2. **Дифференцирование обобщенных функций.** Основным достоинством обобщенных функций, определяющим их приложимость к исследованию дифференциальных уравнений является их бесконечная дифференцируемость в смысле следующего определения.

Определение 9.1. *Для заданной обобщенной функции f ее производная по x определяется как:*

$$(f', \phi) = -(f, \phi'). \tag{9.4}$$

Легко видеть, что данное определение дает обобщенную функцию умеренного роста.

Пример 1. Для производной функции Хевисайда имеем:

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int_0^{+\infty} dx \phi'(x) = \phi(0),$$

так что

$$\theta' = \delta, \tag{9.5}$$

Пример 2. Показать, что в смысле главных значений:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

где обобщенная функция $\dfrac{1}{x^2}$ в смысле главного значения определяется как

$$\left(\frac{1}{x^2}, \phi\right) = \text{p.v.} \int dx \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} \equiv \int\limits_0^{\infty} dx \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}$$

9.3. **Первообразные обобщенных функций.** Пусть $\eta(x)$ – первообразная основной функции $\phi(x)$ из $\mathscr{S}$. Покажем, что функция $\eta(x)$ принадлежит $\mathscr{S}$ и однозначно определяется тогда и только тогда, когда

$$\int dx \phi(x) = 0. \tag{9.6}$$

Пусть существует $\eta(x) \in \mathscr{S}$, заданная посредством $\eta'(x) = \phi(x)$. Тогда

$$\int dx\, \phi(x) = \int dx\, \eta'(x) = 0,$$

т.е. (9.6) выполнено. Обратно, положим, что (9.6) выполнено и положим $\eta(x) = \int_{-\infty}^x dy\, \phi(y)$. Очевидно, что при больших x эта функция константа (ограничена). Понятно, что в силу условия (9.6) $\eta(x)$ стремится к нулю на обоих бесконечностях. Единственность такой функции и ее бесконечная дифферецируемость очевидны. Оценки $|x^m \eta^{(n)}(x)|$ выполнены при всех $n \geq 1$, а при $n = 0$ они следуют тривиально.

Теорема 9.1. *Любая обобщенная функция f из $\mathscr{S}'$ обладает первообразной g, $g' = f$, принадлежащей пространству из $\mathscr{S}'$, причем такая первообразная единственна с точностью до произвольной константы.*

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ и $\omega(x)$ – произвольные основные функции из $\mathscr{S}$, причем $\int dx\, \omega(x) = 1$. По сказанному выше тогда найдется такая основная функция $\phi(x)$, что

$$\psi(x) = \phi'(x) + \omega(x) \int dy\, \psi(y),$$

где $\phi'(x)$ определена данным равенством и $\int dx\, \varphi'(x) = 1$. Действие обобщенной функции $g(x)$ должно быть линейным, поэтому ввиду предыдущего равенства

$$(g, \psi) \equiv (g, \phi') + (g, \omega)(1, \psi) = -(f, \phi) + (g, \omega)(1, \psi), \tag{9.7}$$

что, очевидно, задает линейный непрерывный функционал из $\mathscr{S}'$.■

9.4. **Сходимость обобщенных функций.** Мы говорим, что последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \dots$ сходится к обобщенной функции f, если для любой основной функции ϕ

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \phi) = (f, \phi).$$

Тогда дифференцирование – непрерывная операция. Действительно, если последовательность обобщенных функций $f_n \to f$, $n \to \infty$, то

$$(f_n', \phi) = -(f_n, \phi') \to -(f, \phi') = (f', \phi).$$

Пример: $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n} \to 0$ в смысле пространства $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$. Но тогда и $e^{inx} \to 0$ в смысле $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма 9.1. *Пусть дана последовательность функционалов $\{f_k\}$ из слабо ограниченного множества $M' \subset \mathscr{S}'$, т.е. $|(f, \phi)| < C_\phi$ для всех $f \in M'$ и $\phi \in \mathscr{S}$. Пусть $\{\phi_k\}$ – последовательность основных функций, сходящаяся к нулю: $\phi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, при $k \to \infty$. Тогда $(f_k, \phi_k) \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство леммы. Предположим, что данное утверждение неверно. Тогда из данных последовательностей можно выделить такие подпоследователности, что $|(f_k, \phi_k)| \geq c > 0$. Сходимость последовательности ϕ_k в $\mathscr{S}$ к нулю эквивалентно можно сформулировать как сходимость к нулю по метрике

$$\rho(\phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{-p}\|\phi\|^{(p)}}{1 + \|\phi\|^{(p)}}, \tag{9.8}$$

т.е. $\rho(\phi_k) \to 0$. Переходя к подпоследовательности, всегда можем считать, что выполняется: $\rho(\phi_k) \leq \dfrac{1}{4^k}$. Введем $\psi_k = 2^k\phi_k$, так что при $k \to \infty$: $\rho(\psi_k) \to 0$, т.е. $\psi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, и

$$|(f_k, \psi_k)| \geq 2^k c \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{9.9}$$

Выделим теперь подпоследовательности f_{k_n} и ψ_{k_n} следующим построением по индукции. Выберем f_{k_1} и ψ_{k_1} так, чтобы $|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geq 2$. Пусть f_{k_j} и ψ_{k_j} при $j = 1, 2, \dots, n-1$ уже построены. Построим f_{k_n} и ψ_{k_n}. В силу $\psi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, имеем $(f_{k_j}, \psi_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и $j = 1, 2, \dots, n-1$. Поэтому найдется такой номер N, что при всех $k \geq N$

$$(f_{k_j}, \psi_k) \leq \frac{1}{2^{n-j}}, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{9.10}$$

С другой стороны, по условию $|(f_k, \psi_{k_j})| \leq c_{k_j}$ при $j = 1, 2, \dots, n-1$. Далее, по (9.9) выберем такой номер $k_n \geq N$, что

$$|(f_{k_n}, \psi_{k_n})| \geq \sum_{1\leq j\leq n-1} c_{k_j} + n + 1. \tag{9.11}$$

Итак, мы ввели f_{k_n} и ψ_{k_n} такие, что по (9.9) и (9.10)

$$(f_{k_j}, \psi_{k_n}) \leq \frac{1}{2^{n-j}}, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{9.12}$$

$$|(f_{k_n}, \psi_{k_n})| \geq \sum_{1\leq j\leq n-1} |(f_{k_n}, \psi_{k_j})| + n + 1. \tag{9.13}$$

Положим $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{k_j}$. Поскольку $\rho(\psi_k) \leq 2^{-k}$, ряд сходится в $\mathscr{S}$ к $\psi \in \mathscr{S}$, а тогда

$$(f_{k_n}, \psi) = (f_{k_n}, \psi_{k_n}) + \sum_{j\neq n}(f_{k_n}, \psi_{k_j}).$$

Тогда в силу (9.12) и (9.13) имеем оценку

$$|(f_{k_n},\psi)| \geq |(f_{k_n},\psi_{k_n})| - \sum_{1\leq j\leq n-1} |(f_{k_n},\psi_{k_j})| - \sum_{j\geq n+1}^{\infty} |(f_{k_n},\psi_{k_j})| \geq$$

$$n+1-\sum_{j\geq n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{j-n}} = n,$$

т.е. $(f_{k_n},\psi)\to\infty$ при $n\to\infty$, что противоречит условию леммы. ■

Литература к лекции 9: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”; В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”.

10. Лекция 10.

10.1. **Теорема Лорана Шварца.**

Теорема 10.1. *Пусть M' – слабо ограниченное множество функционалов из $\mathscr{S}'$, т.е. $|(f,\phi)| < C_\phi$ для всех $f \in M'$ и $\phi \in \mathscr{S}$. Тогда существуют такие числа $K \geq 0$ и $m \geq 0$, что*

$$|(f,\phi)| \leq K\|\phi\|^{(m)}, \quad f \in M', \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{10.1}$$

Доказательство. Если неравенство (10.1) несправедливо, то найдутся последовательности $\{f_k\}$ – функционалов из M' и ϕ_k – функций из $\mathscr{S}$ такие, что

$$|(f_k,\phi_k)| \geq k\|\phi_k\|^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{k}\|\phi_k\|^{(k)}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

стремится к 0 в $\mathscr{S}$, ибо при $k \geq p$:

$$\|\psi_k\|^{(p)} = \frac{\|\phi_k\|^{(p)}}{\sqrt{k}\|\phi_k\|^{(k)}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Последовательность функционалов $\{f_k\}$ ограничена на каждой основной функции ϕ из $\mathscr{S}$. Поэтому по доказанной выше лемме имеем $(f_k,\psi_k) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, неравенство (10.1) дает

$$|(f_k,\psi_k)| = \frac{|(f_k,\phi_k)|}{\sqrt{k}\|\phi_k\|^{(k)}} \geq \sqrt{k}.$$

Полученное противоречее и доказывает теорему. ■

Следствие 10.1. *Всякая обобщенная функция умеренного роста имеет конечный порядок, т.е. допускает продолжение как линейный непрерывный функционал из некоторого (наименьшего) сопряженного пространства $\mathscr{S}'_m$, при этом неравенство (10.1) принимает вид*

$$|(f,\phi)| \leq \|f\|^{(-m)}\|\phi\|^{(m)}, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{10.2}$$

где $\|f\|^{(-m)}$ – норма функционала f в $\mathscr{S}'_m$, m называется порядком f.

Таким образом справедливы соотношения

$$\mathscr{S}'_0 \subset \mathscr{S}'_1 \subset \mathscr{S}'_2 \subset \ldots, \qquad \mathscr{S}' = \bigcup_{p\geq 0} \mathscr{S}'_p.$$

Можно показать, что каждая слабо сходящаяся последовательность функционалов из $\mathscr{S}'_p$ сходится по норме в $\mathscr{S}'_{p+1}$. А тогда, поскольку всякая слабо сходящаяся последовательность в $\mathscr{S}'$ есть слабо ограниченное множество в $\mathscr{S}'$, то по теореме Шварца, всякая слабо сходящаяся последовательность обобщенных функций медленного роста слабо сходится в некотором пространстве $\mathscr{S}'_p$ и, значит, сходится по норме в $\mathscr{S}'_{p+1}$. Таким образом, пространство $\mathscr{S}'$ полно.

10.2. **Структура обобщенных функций медленного роста.**

Теорема 10.2. *Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то существует непрерывная функция g медленного роста на $\mathbb{R}^n$ и целое число $m \geq 0$ такие, что $f(x) = D_1^m \ldots D_n^m g(x)$.*

Доказательство. Проведем его для случая $n = 1$. По теореме Шварца существуют числа K и p такие, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$|(f, \varphi)| \leq K \|\varphi\|^{(p)}.$$

Но по (8.1) мы можем записать

$$\|\varphi\|^{(p)} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \alpha \leq p}} \left| \int\limits_{-\infty}^{x} dy \frac{d}{dy} [(1 + x^2)^{p/2} \varphi^{(\alpha)}(x)] \right| \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \leq p} \int dx \left| \frac{d}{dx} [(1 + x^2)^{p/2} \varphi^{(\alpha)}(x)] \right|,$$

так что

$$|(f, \varphi)| \leq K \max_{\alpha \leq p} \left\| \frac{d}{dx} [(1 + x^2)^{p/2} \varphi^{(\alpha)}(x)] \right\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Положим $\psi_\alpha = \dfrac{d}{dx}[(1 + x^2)^{p/2} \varphi^{(\alpha)}(x)]$. Это сопоставляет каждой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ набор $\{\psi_\alpha\}$, т.е. мы имеем отображение $\varphi \to \{\psi_\alpha\}$ из пространства $\mathscr{S}$ в пространство $\oplus_{\alpha \leq p} \mathcal{L}^1$ с нормой $\|\{psi_\alpha\}\| = \max_{\alpha \leq p} \|\psi_\alpha\|_{\mathcal{L}^1}$. На линейном подмножестве $\{\{\psi_\alpha\}, \varphi \in \mathscr{S}\}$ пространства $\oplus_{\alpha \leq p} \mathcal{L}^1$ введем линейный функционал f^* посредством равенства $f^*(\{\psi_\alpha\}) = (f, \varphi)$. В силу доказанного выше

$$|f^*(\{\psi_\alpha\})| = |(f, \varphi)| \leq K \max_{\alpha \leq p} \|\psi_\alpha\|_{\mathcal{L}^1} \leq K \|\{\psi_\alpha\}\|,$$

так что функционал f^* непрерывен. Тогда в силу теоремы Хана–Банаха он непрерывно продлевается на все пространство $\oplus_{\alpha \leq p} \mathcal{L}^1$. Но, как известно $(\mathcal{L}^1)^* = \mathcal{L}^\infty$, так что в сопряженном пространстве $\oplus_{\alpha \leq p} \mathcal{L}^\infty$ существует вектор $\{\chi_\alpha\}$ такой, что

$$f^*(\{\psi_\alpha\}) = \sum_{\alpha \leq p} \int dx \chi_\alpha(x) \psi_\alpha(x).$$

Итак, для любого $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$(f, \varphi) = \sum_{\alpha \leq p} \int dx\, \chi_\alpha(x) \frac{d}{dx} [(1 + x^2)^{p/2} \varphi^{(\alpha)}(x)] =$$

$$= \sum_{\alpha \leq p} \int dx g_\alpha(x) \varphi^{(\alpha+2)}(x).$$

Здесь добавлена одна производная в $\varphi^{(\alpha+2)}$, чтобы обеспечить непрерывность функции g_α, являющейся первообразной множителей функций $\varphi^{(\alpha+1)}(x)$ в первой строчке. Окончательно получаем:

$$f(x) = \frac{d^m}{dx^m} g(x), \text{ где } m = p + 2. \qquad \blacksquare$$

10.3. **Прямое произведение обобщенных функций и свертка.** Пусть заданы обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $\phi(x, y)$ – основная функция. Тогда прямое произведение $f \times g$ определяется как

$$(f(x) \times g(y), \phi(x, y)) = (f(x), (g(y), \phi(x, y))).$$

Свойства:

$$\text{Коммутативность:} \quad f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x),$$

$$\text{Ассоциативность:} \quad f(x) \times \{g(y) \times h(z)\} = \{f(x) \times g(y)\} \times h(z).$$

Доказательство следует из того факта, что любую основную функцию $\phi(x,y)$ можно приблизить суммами $\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\psi_j(y)$, где $j=1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$ и $\phi_j(x)$ и $\psi_j(y)$ – последовательности основных функций своих переменных. Кроме того,

$$(f(x)\times g(y),\phi(x)\psi(y))=(f(x),\phi(x))(g(y),\psi(y)).$$

Для дальнейшего нам потребуется понятие **свертки** функций. Если $f(x)$ и $g(x)$ – две абсолютно интегрируемых функции на прямой, то их свертка определяется как

$$(f*g)(x)=\int dy f(y)g(x-y)\equiv\int dy f(x-y)g(y).$$

(1) Свертка линейна по каждому аргументу.
(2) Свертка коммутативна: $f*g=g*f$.
(3) Дистрибутивность: $f*(g+h)=f*g+f*h$.
(4) Ассоциативность: $f*(g*h)=(f*g)*h$ (Требует для своего доказательства существования и перестановочности всех интегралов.)

Так что для любой основной функции $\phi(x)$:

$$((f*g),\phi)=\int dx\int dy f(y)g(x)\phi(x+y).$$

Поэтому для обобщенных функций f и g мы определим свертку как

$$(f*g,\phi)=(f(x)\times g(y),\phi(x+y)),$$

если указанный функционал существует. Важно помнить, что $\phi(x+y)$ не есть основная функция двух переменных x и y, так что он не обязан существовать. В частности, это определение осмыслено, если

1) одна из обобщенных функций имеет ограниченный носитель;

2) носители обоих обобщенных функций ограничены с одной и той же стороны, например, $f(x)=0$ при $x<a$ и $g(y)=0$ при $y<b$.

Для доказательства следует рассмотреть выражения $(f(x),\phi(x+y))$. Так в случае 1) это – основная функция от y. Легко проверить, что

$$\delta*f=f\quad\text{для любой обобщенной функции}\quad f,$$
$$f*g=g*f,\quad\text{по крайней мере в случаях 1) и 2),}$$
$$(f*g)*h=f*(g*h),$$

если носители двух из трех функционалов ограничены, или когда носители всех трех ограничены с одной стороны.

Условия непрерывности свертки, а также равенство

$$(f*g)'=(f'*g\equiv f*g'$$

нужно проверять специально. Произведения обобщенных функций, вообще говоря, неопределены. Примеры: $\frac{1}{x}\delta(x)$, $x\frac{1}{x}\delta(x)$. Однако, возможны и исключения, например:

$$\theta(x)\theta(x-a)=\theta(x-a),\qquad a\geq 0.$$

Свертка двух произвольных обобщенных функций также не обязана существовать. Простейший пример – свертка двух функций, тождественно равных единице. Однако, когда одна из обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, а другая – обобщенная функция с компактным носителем, или когда их носители ограничены с одной и той же стороны, то свертка существует. Например: $(\theta*\theta)(x)=\theta(x)x$.

Литература к лекции 10:

В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”;

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I;

11. Лекция 11.

11.1. **Формулы Сохоцкого–Племеля.** Рассмотрим при $x \in \mathbb{R}_1$ функцию $(x+i\varepsilon)^{-1}$, где $\varepsilon > 0$. Эта функция, очевидно задает регулярную обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$:

$$\big((x+i\varepsilon)^{-1}, \varphi(x)\big) = \int \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon},$$

а из полноты $\mathscr{S}'$ следует, что существиет предел при $\varepsilon \to 0$, который обозначается

$$\big((x+i0)^{-1}, \varphi(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon}. \tag{11.1}$$

Аналогично определяется $(x-i0)^{-1}$. Связь этих обобщенных функций с другими, рассмотренными выше, дается формулами Сохоцкого–Племеля (справедливыми в более широкой области), которые имеют вид

$$\frac{1}{x+i0} = \text{p.v.}\frac{1}{x} - \pi i\delta(x), \qquad \frac{1}{x-i0} = \text{p.v.}\frac{1}{x} + \pi i\delta(x). \tag{11.2}$$

Докажем их.

$$\begin{aligned}
&\big((x+i0)^{-1}, \varphi(x)\big) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon} + \int_{|x|>1}\frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1}\frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon} + \int_{|x|>1}\frac{dx\,\varphi(x)}{x} = \\
&= \int_{-1}^{+1}\frac{dx\,(\varphi(x)-\varphi(0))}{x} + \int_{|x|>1}\frac{dx\,\varphi(x)}{x} + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1}\frac{dx\,(x-i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2} = \\
&= \left(\frac{1}{x}, \varphi\right) - 2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Выразим из этих формул обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в смысле главного значения:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right), \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right)
\end{aligned} \tag{11.3}$$

11.2. **Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{S}'$.** Для произвольной основной функции определим преобразование Фурье посредством

$$F[\phi](k) = \int dx\, e^{ixk}\phi(x), \qquad F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-ixk}\psi(k).$$

Часто используется обозначение $\widetilde{\phi}(k) = F[\phi](k)$. Поскольку $\phi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени x, ее преобразование Фурье можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз:

$$\partial^\alpha F[\phi](k) = \int dx\,(ix)^\alpha e^{ixk}\phi(x),$$

так что $F[\phi](k) \in C^\infty$. Аналогично, интегрируя по частям, получаем

$$k^\beta \partial^\alpha F[\phi](k) = i^{\alpha+\beta} \int dx\, e^{ixk} x^\alpha \partial^\beta \phi(x).$$

Отсюда следует, что при всех α и β функции $k^\beta \partial^\alpha F[\phi](k)$ равномерно ограничены по k на $\mathbb{R}$:

$$|k^\beta \partial^\alpha F[\phi](k)| \leq \int dx\, |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|.$$

Таким образом $F(\phi) \in \mathscr{S}$. Т.е. $\mathscr{S}$ переходит в $\mathscr{S}$, причем это отображение непрерывно в смысле топологии $\mathscr{S}$. Аналогичное утверждение легко получить и для обратного преобразования Фурье. Так как преобразование Фурье $F[\phi](k)$ основной функции $\phi \in \mathscr{S}$ есть интегрируемая и непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, то согласно общей теории преобразования Фурье функция ϕ восстанавливается по $F[\phi](k)$ операцией обратного преобразования Фурье:

$$\phi = F[F^{-1}[\phi]] = F^{-1}[F[\phi]],$$

где

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} F[\psi](-x) = \frac{1}{2\pi} F[\psi(-k)](x),$$

так что, что всякая функция $\phi \in \mathscr{S}$ есть преобразование Фурье функции $\psi = F^{-1}[\phi]$, т.е. $\phi = F[\psi]$, причем, если $F[\phi] = 0$, то и $\phi = 0$. Другими словами, преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$, причем операция преобразования Фурье непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (линейная взаимно непрерывная биекция), как следует из предыдущих формул.

Если обобщенная функция f задается абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, то ее преобразование Фурье существует

$$F[f](k) = \int dx\, e^{ikx} f(x)$$

и есть непрерывная, ограниченная в $\mathbb{R}$ функция, и, следовательно, опопределяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$:

$$(F[f], \phi) = \int dk\, F[f](k)\phi(k).$$

Используя теорему о перемене порядка интегрирования, преобразуем последний интеграл:

$$\int dk\, F[f](k)\phi(k) = \int dk \left(\int dx\, e^{ikx} f(x) \right) \phi(k) = \int dx\, f(x) \left(\int dk\, e^{ikx} \phi(k) \right),$$

так что для основной функции ϕ выполняется равенство

$$(F[f](k), \phi(k)) = (f(x), F[\phi](x)).$$

Для произвольной обобщенной функции из $\mathscr{S}'$ последнее равенство является определением преобразования Фурье:

$$(F[f](k), \phi(k)) = (f(x), F[\phi](x)),$$

причем это преобразование, как очевидно, также является непрерывным. Обратное преобразование определяется аналогично.

Свойства преобразования Фурье:

- $\partial_k^n (F[f](k)) = F[(ix)^n f](k)$,
- $F[\partial_x^n f] = (-ik)^n F[f]$,
- $F[f(x - x_0)](k) = e^{ix_0 k} F[f](k)$,
- $F[f](k + a) = F[e^{ixa} f(x)](k)$, где $a = const$,
- $F[f(x) \times g(x')] = F[f](k) \times F[g](k')$,
- $F[f * g] = F[f]F[g]$,

причем последнее выполняется только если свертка существует, а в правой части возникает произведение обобщенных функций. Условия существования свертки контролировать легче, чем условие существования произведения обобщенных функций, поэтому фурье-образ свертки фурье-образов обобщенных функций часто берется в качестве определения произведения обобщенных функций.

Примеры фурье-образов: $F[\delta] = 1$, $F[\theta](k) = \dfrac{i}{k + i0}$.

Из перечисленных свойств преобразования Фурье следует, что для любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами P выполнено равенство

$$F\left[P(i\partial_x)f(x)\right](k) = P(k)F[f](k),$$

которое является основой многочисленных приложений преобразования Фурье в различных разделах математики.

Показать, что в силу указанных свойств преобразования Фурье и его непрерывности

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = \pm i\pi\delta(k)$$

в смысле обобщенных функций от k.

Литература к лекции 11:

М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 2, “Гармонический анализ. Самосопряженность”;

В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”;

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I;

12. Лекция 12

12.1. **Обобщенные функции комплексного переменного.** Обобщенная функция $1/z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{C})$ (распределение) определяется посредством равенств

$$\left(\frac{1}{z^n}, f\right) = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|z|>\epsilon} \frac{d^2z}{z^n} f(z),$$

где $f \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z^2}, f\right) &= \int\limits_{|z|>1} \frac{d^2z}{z^2} f(z) + \\ &\quad + \int\limits_{|z|<1} \frac{d^2z}{z^2}(f(z) - f(0)).\end{aligned}$$

Формулы Грина:

$$\begin{aligned} 2i \int\limits_D d^2z\ \partial_{\bar z} f(z) &= \oint\limits_{\partial D} dz\, f(z), \\ 2i \int\limits_D d^2z\ \partial_z f(z) &= -\oint\limits_{\partial D} d\bar z\, f(z) \end{aligned}$$

(область D находится слева от контура ∂D при интегрировании по нему).

Формула Коши–Грина:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} dz'\, \frac{f(z')}{z - z'} + \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{d^2z}{z - z'}\, \partial_{\bar z'} f(z'),$$

для $z \in D \subset \mathbb{C}$ и $f(z) = 0$ в противном случае.

Выполнено асимптотическое равентство:

$$\frac{1}{z + \Delta} - \frac{1}{z} = -\frac{\Delta}{z^2} + \pi\overline{\Delta}\delta(z) + o(\Delta), \quad \Delta \to 0,$$

где $o(\Delta)$ означает обобщенную функцию, стремящуюся к нулю при $\Delta \to 0$.

Это равенство можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int d^2z \left(\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z}\right) f(z) = \int \frac{d^2z}{z}\left(f(z-\Delta) - f(z)\right) = \\ &= -\int \frac{d\overline{z} \wedge dz}{2i} \frac{1}{z}\left(\Delta\partial_z f(z) + \overline{\Delta}\partial_{\bar z} f(z)\right) + o(\Delta) = \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{|z|>\epsilon} \frac{d^2z}{z}\left(\Delta\partial_z f(z) + \overline{\Delta}\partial_{\bar z} f(z)\right) + o(\Delta) = \\ &= -\Delta \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|z|>\epsilon} \frac{d^2z}{z} \partial_z f(z) - \overline{\Delta} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|z|>\epsilon} \frac{d^2z}{z} \partial_{\bar z} f(z) + o(\Delta) = \\ &= -\left(\frac{\Delta}{z^2}, f\right) + \overline{\Delta} \lim_{\epsilon\to 0} \oint\limits_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{z} f(z) + o(\Delta) = \\ &= -\left(\frac{\Delta}{z^2}, f\right) + \overline{\Delta}\pi f(0) + o(\Delta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\partial_{\bar z}\frac{1}{z}=\pi\delta(z)$$

В частности, мы имеем для оператора Лапласа:

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)G(x,y)=\delta(x)\delta(y)$$

что с учетом обозначений

$$z=x+iy,\qquad \partial_z=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)$$

переписывается в виде

$$\partial_z\overline{\partial_z}g(z)=\frac{1}{4}\delta(z),\quad \text{где}\quad g(z)=G(x,y).$$

В задачах мы имели, что $\partial_z\ln|z|^2=1/z$ и $\overline{\partial_z}1/z=\pi\delta(z)$. Так что

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2).$$

12.2. **Фундаментальные решения и функции Грина дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Lu(x)\equiv\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{\partial^n u(x)}{\partial t^x}=f(x)$$

в классе гладких дифференцируемых функций основано на свойстве преобразования Фурье:

$$F[\partial_x^n f]=(-ip)^n F[f],$$

где для основных и интегрируемых функций

$$F[\phi](p)=\int dx\, e^{ipx}\phi(x),\qquad F^{-1}[\psi](x)=\frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{-ipx}\psi(p).$$

Применяя его к обоим частям дифференциального уравнения, получаем уравнение вида

$$P(p)F[u](p)=F[f](p),$$

где полином

$$P(p)=\sum_{n=0}^{N}a_n(-ip)^n.$$

Т.е. формально

$$F[u](p)=\frac{F[f](p)}{P(p)}.$$

Предположим, что такое деление возможно, т.е., что $P(p)$ не имеет вещественных нулей. Тогда, совершая обратное преобразование, получаем

$$u(x)=\int dyG(x-y)f(y),$$

где возникло фундаментальное решение оператора L:

$$G(x)=F^{-1}\left[\frac{1}{P(p)}\right](x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\frac{dp\, e^{-ipx}}{P(p)},$$

так что

$$LG(x) = \delta(x).$$

Таким образом в данном случае фундаментальное решение существует и определено однозначно, поскольку однозначна процедура деления, в знаменателе нет нулей, так что интеграл существует и сходится. Собственно, то же самое верное и для большего числа измерений.

Рассмотрим более общий случай, когда у полинома $P(p)$ имеются вещественные нули, причем будем считать, что они простые. Как известно, всегда можно записать

$$P(p) = \prod_{n=1}^{N} a_N(-i)^N(p - q_n).$$

Пусть, скажем, q_1 вещественен. Тогда, во-первых, $1/P(p)$ сингулярен и следует выбрать как мы понимаем $1/(p - q_1)$: главное значение, или $1/(p - q_1 + i0)$, или $1/(p - q_1 - i0)$, или еще как-то. Но после этого возникает проблема неоднозначности – вспомнить задачу $xf(x) = 0$. Ну и так далее для всех вещественных корней полинома $P(p)$.

Пример: уравнение Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом:

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - k^2\psi(x) = f(x), \quad \text{где } k \neq 0 \text{ – вещественный параметр,}$$

так что

$$-\frac{d^2G(x)}{dx^2} - k^2G(x) = \delta(x).$$

Здесь

$$P(p) = p^2 - k^2$$

а потому

$$F[\psi](p) = \frac{F[f](p)}{(p-k)(p+k)}.$$

Конечно, нужно фиксировать выбор обобщенных функций и учесть неоднозначность деления. Положим

$$F[\psi](p) = \frac{F[f](p)}{(p-k+i0)(p+k+i0)} + c_-\delta(p-k) + c_+\delta(p+k), \tag{12.1}$$

где c_- и c_+ – неопределенные константы. Совершая обратное преобразование Фурье, получаем

$$\psi(x) = \int dy\, G(x-y,k)f(y) + c_-e^{-ikx} + c_+e^{ikx},$$

$$G(x,k) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dp\, e^{-ipx}}{(p-k+i0)(p+k+i0)}.$$

Вспоминая задачу 10 из Листка 4, имеем:

$$G(x,k) = \frac{1}{4k\pi}\int dp\, e^{-ipx}\left(\frac{1}{p-k+i0} - \frac{1}{p-k+i0}\right) = -\eta(x)\frac{\sin kx}{k}.$$

Произвол в выборе констант фиксируется граничными условиями, например,

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi_x(0) = 0,$$

что дает:

$$c_\pm = \frac{1}{2}\int dy\left[-G(-y,k) \pm \frac{i}{k}G_x(-y,k)\right]f(y).$$

Ответ так же можно записать в виде

$$\psi(x) = \int dy\, G_0(x,y,k) f(y)$$

где теперь $G_0(x,y,k)$ не есть функция разности:

$$G_0(x,y,k) = \big[\eta(-y) - \eta(x-y)\big]\frac{\sin k(x-y)}{k},$$

$$\psi(x) = \int\limits_0^x dy\, \frac{\sin k(x-y)}{k} f(y).$$

Замечание о прямом произведении обобщенных функций. Обращение с прямым произведением на каждом этапе требует аккуратности, чтобы не выйти за его рамки. Так, казалось бы очевидное равенство

$$\frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right), \tag{12.2}$$

где выражения типа $1/x$ понимаются в смысле главного значения, неверно, хотя все члены в обоих частях хорошо определены именно как прямые произведения обобщенных функций. Дело здесь в том, что при приведении правой части к общему знаменателю возникает отношение $\dfrac{y-x}{(y-x)xy}$, которое уже не есть прямое произведение, поскольку в знаменателе сингулярны три множителя, зависящие только от двух переменных. Правильный способ действий, например, такой. Пусть ϵ_1 и ϵ_2 – положительны. Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{x+i\epsilon_1}\frac{1}{y-i\epsilon_2} = \frac{1}{y-x-i(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left(\frac{1}{x+i\epsilon_1} - \frac{1}{y-i\epsilon_2}\right),$$

которое заведомо верно, поскольку не содержит особенностей. Более того, это равенство допускает предел $\epsilon_1, \epsilon_2 \to +0$, независящий от порядка предельных переходов. Это дает по определению равенство обобщенных функций (их прямых произведений):

$$\frac{1}{x+i0}\frac{1}{y-i0} = \frac{1}{y-x-i0}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{y-i0}\right).$$

Очевидно, что в прямом произведении обобщенных функций мы для каждой из них можем пользоваться формулой Сохоцкого–Племеля. Тогда вещественная часть этого предыдущего равенства дает

$$\frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + \pi^2\delta(x)\delta(y), \tag{12.3}$$

что есть правильная версия правой части формулы (12.2). Равенство (12.3) также может быть получено посредством свертки Фурье-образов главных значений.

Литература к лекции 12: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. II; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”, Г.Бремерман, “Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье”.

13. Лекция 13. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве

13.1. **Топологии на пространстве ограниченных операторов.** В приложениях наибольший интерес представляют неограниченные операторы в гильбертовых пространствах. Например, неограниченным является оператор умножения в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Однако в этой части курса мы рассмотрим только ограниченные операторы. Множество таких операторов, $B(H_1, H_2)$, где H_1 и H_2 - гильбертовы пространства, как уже говорилось ранее, является банаховым пространством относительно **операторной** (часто ее называют **равномерной**) нормы

$$\|T\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|}. \tag{13.1}$$

Однако на пространстве $B(H_1, H_2)$ помимо этой топологии можно ввести еще две. **Сильная операторная топология** определяется как условие, что последовательность ограниченных операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору T, что обозначается как $T = \text{s-lim}_{n\to\infty} T_n$, если

$$\|(T_n - T)v\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для всех } v \in H_1. \tag{13.2}$$

Слабая операторная топология – это топология в которой сходимость последовательности ограниченных операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ к оператору T, что обозначается как $T = \text{w-lim}_{n\to\infty} T_n$, если

$$\langle u, (T_n - T)v\rangle \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для всех } u, v \in H_1. \tag{13.3}$$

Сходимость последовательности по норме (13.1) влечет за собой сходимость в сильном и слабом смысле, т.е. (13.2) и (13.3). Сильная сходимость (13.2) влечет за собой слабую сходимость в смысле (13.3), но не равномерную, (13.1). Слабая сходимость (13.3) – самая слабая из рассматриваемых.

Пример: операторные топологии в ℓ^2.

1. Пусть последовательность операторов T_n задана равеснтвом

$$T_n(v_1, v_2, \ldots) = \frac{1}{n}(v_1, v_2, \ldots).$$

Тогда $T_n \to 0$ равномерно.

2. Пусть последовательность операторов T_n задана равеснтвом

$$T_n(v_1, v_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots).$$

Тогда $T_n \to 0$ сильно, но не равномерно.

3. Пусть последовательность операторов T_n задана равеснтвом

$$T_n(v_1, v_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, v_1, v_2, \ldots).$$

Тогда $T_n \to 0$ слабо, но не сильно и не равномерно.

Можно доказать и общее утверждение. Пусть последовательность ограниченных операторов T_n такова, что последовательность $\{\langle u, T_n v\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ сходится при $n \to \infty$ для любых $u, v \in H$. Тогда существует такой ограниченный оператор $T \in B(H)$, что $T = \text{w-lim}_{n\to\infty} T_n$.

13.2. **Обратный оператор.** Пусть T – ограниченный оператор в H. Введем **область значений** оператора T

$$\text{Ran}(T) = \{\psi \in H \,|\, \psi = T\varphi \text{ для некоторого } \varphi \in H\}$$

и **ядро (нулевое подпространство)**:

$$\text{Ker}(T) = \{\varphi \in H \,|\, T\varphi = 0.\}$$

Если T отображает H в $\mathrm{Ran}(T)$ взаимо однозначным образом, то существует **обратный оператор** T^{-1}:

$$T^{-1}T\varphi = \varphi \text{ для любого } \varphi \in H; \quad TT^{-1}\psi = \psi \text{ для любого } \psi \in \mathrm{Ran}(T).$$

Иными словами, оператор T имеет обратный T^{-1} тогда и только тогда, когда из $T\varphi = 0$ следует, что $\varphi = 0$. Т.е. $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

13.3. **Сопряженный оператор.** По неравенству Коши–Буняковского и определению нормы оператора, для любого ограниченного оператора T в гильбертовом пространстве H и любых $\varphi, \psi \in H$ выполняется

$$|\langle \varphi, T\psi \rangle| \leq \|T\| \|\varphi\| \|\psi\|,$$

т.е. при каждом фиксированном φ скалярное произведение $\langle \varphi, T\psi \rangle$ задает непрерывный линейный функционал от ψ. Тогда по лемме Рисса (лемма 3.2) существует вектор η такой, что

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle \text{ for all } \psi \in H. \tag{13.4}$$

Мы введем оператор T^* посредством равенства $T^*\varphi = \eta$. Оператор T^* называется **сопряженным** к T. Итак

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^*\varphi, T\psi \rangle \text{ для любых} \varphi, \psi \in H, \tag{13.5}$$

так что оператор T^* определен на всем H.

Предложение 13.1. *Сопряженный оператор T^* обладет следующими свойствами:*

(1) *отображение $T \mapsto T^*$ есть сопряженно линейная изометрия пространства $B(H)$ на себя;*
(2) $(ST)^* = T^*S^*$;
(3) $(T^*)^* = T^{**} = T$;
(4) *если оператор T имеет ограниченный обратный T^{-1}, то оператор T^* также имеет ограниченный обратный, причем $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из цепоки равенств:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \|T\varphi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \psi, T\varphi \rangle| = \\ &= \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle T^*\psi, \varphi \rangle| = \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, T^*\psi \rangle| = \\ &= \sup_{\|\psi\|=1} \|T^*\psi\| = \|T^*\|. \end{aligned}$$

Утверждения (2) и (3) проверяются непосредственно. Для доказательства утверждения (4) заметим, что из равенства $TT^{-1} = I = T^{-1}T$ и свойства (2) следует, что $(T^{-1})^*T^* = I = T^*(T^{-1})^*$, что и доказывает $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ■

Легко видеть, что если T – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, то

$$\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Ran}(T))^{\perp}, \qquad (\mathrm{Ker}(T))^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}(T^*)}.$$

Иными словами

$$H = \mathrm{Ker}(T^*) \oplus \overline{\mathrm{Ran}(T)} = \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Ran}(T^*)}.$$

Определение 13.1. *Ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется самосопряженным, если $T^* = T$.*

13.4. **Спектр оператора.**

Определение 13.2. *Пусть T – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. говорят, что комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству, $\rho(T)$, если $\lambda I - T$ – биекция $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$ с ограниченным обратным. Если $\lambda \in \rho(T)$, то оператор $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ называется резольвентой оператора T в точке λ. Если $\lambda \notin \rho(T)$, то говорят, что λ принадлежит спектру $\sigma(T)$ оператора T.*

Заметим, что по теореме об обратном отображении оператор $\lambda I - T$ автоматически обладает ограниченным обратным, если он биективен.

Выделим два подмножества в спектре оператора.

Определение 13.3. *Пусть $\varphi \in \mathscr{H}$.*

(1) *Вектор $\varphi \neq 0$, который удовлетворяет $T\varphi = \lambda\varphi$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **собственным вектором** оператора T; λ называется соответствующим **собственным значением**. Если λ – собственный вектор, то оператор $\lambda I - T$ не инъективен, так что λ принадлежит спектру T. Множество всех собственных значений называется **точечным спектром** оператора T.*

(2) *Если λ не есть собственное значение и если $\mathrm{Ran}(\lambda I - T)$ не плотен, то говорят, что λ принадлежит **остаточному спектру**.*

Пример 13.1. *Пусть $\mathscr{H} = \ell^2$. Зададим оператор T посредством равенства*

$$T\{x_1, x_2, \ldots\} = \{0, x_1, x_2, \ldots\}.$$

Этот оператор ограничен, но его область значений, $Ran(T)$, не плотна в $\mathscr{H}$. Тем же свойством обладает его резольвента, $R(\lambda)$, при $\lambda = 0$. Значит точка $\lambda = 0$ принадлежит остаточному спектру оператора T.

Литература к лекции 13: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.