

Уравнение Вейрштрасса и его корни.
В конце прошлой лекции мы вывели уравнение Вейрштрасса:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - 60e_4\wp - 140e_6.$$

Исследуем корни кубического многочлена $4x^3 - 60e_4x - 140e_6$. Для этого сформулируем следующие определение и лемму:

Определение. Скажем, что нули (полюса) эллиптической функции эквивалентны, если их разность лежит в решетке периодов $\{m\omega_1 + n\omega_2\}$.

Лемма 1. Число классов эквивалентности нулей ненулевой эллиптической функции с учетом кратности равно числу классов эквивалентности полюсов с учетом кратности.

Доказательство аналогично решению Задачи 3 из первого листочка, а именно:

В параллелограмме $z = t\tau + s$, $-1 \leq t, s \leq 1$ функция имеет конечное число нулей в силу компактности ограниченного множества и отсутствия предельных точек у множества нулей голоморфной функции. Поэтому можно выбрать точку z_0 так что контур $\Gamma(z_0) = \{z_0 + t | 0 \leq t \leq 1\} \cup \{z_0 + 1 + t\tau | 0 \leq t \leq 1\} \cup \{z_0 + 1 + \tau - t | 0 \leq t \leq 1\} \cup \{z_0 + \tau - t\tau | 0 \leq t \leq 1\}$ обходил точку 0 и не содержал нулей функции. Применение принципа аргумента к этому контуру доказывает Лемму.

Следствие. а) Классами нулей функции $\wp'$ являются полупериоды

$$\left\{\frac{\omega_1}{2} + m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{\frac{\omega_2}{2} + m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

и эти нули простые.

б) Различными корнями многочлена $4x^3 - 60e_4x - 140e_6$ являются

$$E_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), E_2 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), E_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

и, стало быть, эти корни простые.

Доказательство. а) Обращение в ноль в полупериодах следует из нечетности и двояко-периодичности функции $\wp'$ так как противоположный к элементам классов лежит в том же классе, например:

$$-\left(\frac{\omega_1}{2} + m\omega_1 + n\omega_2\right) = \frac{\omega_1}{2} - (m+1)\omega_1 - n\omega_2$$

и $\wp'\left(\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right) = -\wp'\left(\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)\right) = -\wp'\left(\left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_1\right)\right) = -\wp'\left(\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)$. В силу Леммы 1 эти нули простые и других нет, так как единственный класс полюсов $\wp'$ имеет порядок три.

б) Подставив в уравнение Вейрштрасса ноль функции $\wp'$ получим, что значение $\wp$ в этом нуле будет корнем кубического многочлена, стало быть E_1, E_2, E_3 являются корнями этого многочлена. Осталось показать, что эти числа различны. Это следует из Леммы 1 для функций $\wp - E_\alpha$ с учетом того, что эта функция зануляется в соответствующем полупериоде с кратностью два, так как ее производная $\wp'$ также равна нулю.

Модулярные формы.

С очевидностью одновременное умножение всех аргументов рассмотренных выше функций меняет значение контролируемым образом:

$$\wp(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-2} \wp(z | \omega_1, \omega_2), \wp'(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-3} \wp'(z | \omega_1, \omega_2),$$

$$e_k(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-k} e_k(\omega_1, \omega_2).$$

Это позволяет уменьшить число аргументов на один, положив $\omega_2 = 1$ и $\Im(\omega_1) > 0$:

$$\wp(\lambda z, \tau) = \wp(z | \tau, 1), \wp'(\lambda z, \tau) = \wp'(z | \tau, 1), e_k(\tau) = \lambda^{-k} e_k(\tau, 1).$$

Функции $e_k(\omega_1, \omega_2)$ зависят только от решетки $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, поэтому для целочисленной унимодулярной матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $e_k(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = e_k(\omega_1, \omega_2)$ или $e_k(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau + d)^k e_k(\tau)$.

Это мотивирует следующее

Определение 1. Пусть Γ - подгруппа конечного индекса в $SL_2(\mathbb{Z})$. Скажем, что голоморфная на верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{\tau | \Im(\tau) > 0\}$ функция f является **модулярной формой** веса k относительно группы γ если:

$$1) f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau + d)^k f(\tau) \text{ при } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

$$2) (c\tau + d)^{-k} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) \text{ ограничена при } \Im \tau \rightarrow \infty \text{ для всех } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Предложение 1а) $e_k(\tau)$ - модулярная форма веса k относительно $SL_2(\mathbb{Z})$.

б) E_4 - модулярные формы веса 2 относительно $\Gamma(2)$, где $\Gamma(2)$ - подгруппа матриц с нечетными a и d и четными b и c .

Доказательство трансформационных свойств – прямая выкладка с учетом свойств функций Вейерштрасса, а оценка поведения при стремлении к бесконечности легко получается как оценки соответствующих рядов.