12.12.2018 | Классическая теория =1= поля

# Лекция №13

На прошлой лекции мы записали решение динамических уравнений Максвелла в Лоренцевской калибровке с помощью запаздывающей функции Грина:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Rightarrow \begin{cases} \Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x) \\ \partial_\mu A^\mu = 0. \end{cases}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

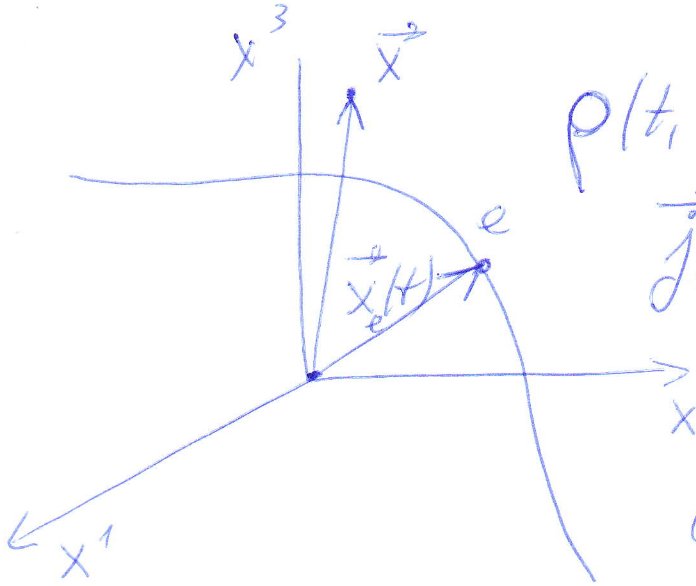
$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int\limits_{M_4} d^4y\, G(x-y)\, j^\mu(y)$$

$$G(x) = \frac{\theta(x^0)\,\delta(x^0 - |\vec{x}|)}{4\pi |\vec{x}|} = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0)\,\delta(x_\mu x^\mu).$$

Рассмотрим поля, порождаемые движущейся точечной частицей с зарядом $e$, предполагая известным закон движения частицы $\vec{x}_e(t)$.

Выражение для плотности заряда и плотности трёхмерного тока $\vec{j}(x)$

имеют такой вид: 




$$\rho(t,\vec{x}) = e\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_e(t))$$

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \vec{v}_e(t)\, e\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_e(t))$$

$\vec{v}_e(t) = \dfrac{d\vec{x}_e(t)}{dt}$ — вектор скорости частицы.

$$j^\mu(t,\vec{x}) = (c\rho(t,\vec{x}), \vec{j}(t,\vec{x})).$$

Рассмотрим компоненту $A^0(t,\vec{x})$ вектор-потенциала $A^\mu$:

$$A^{(0)}(t,\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\int d^4y\, G(x-y)\, j^0(y) = \{y^\mu = (c\tau, \vec{y})\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3y\, \frac{\delta(ct-c\tau-|\vec{x}-\vec{y}|)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, ce\,\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x}_e(\tau)) =$$

$= \{\int d^3y$ легко вычисляется благодаря $\} =$

$$= ec\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \frac{\delta(ct-c\tau-|\vec{x}-\vec{x}_e(t)|)}{|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|} = \left\{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\right\} =$$

$$= e\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \frac{\delta\left(t-\tau-\frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|}.$$

Чтобы вычислить интеграл по $\tau$ с помощью оставшейся $\delta$-функции, воспользуемся формулой:

$$\delta(g(\tau)) = \sum_i \frac{\delta(\tau-\tau_i)}{\left|\frac{dg}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_i}\right|}, \text{ где } g(\tau_i)=0 \text{ и}$$

$\tau_i$ — простые нули ф-ции $g(\tau)$.

В нашем случае: $g(\tau) = t - \tau - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|}{c}$

$$\Rightarrow \left|\frac{dg}{d\tau}\right| = \left|-1 + \frac{(\vec{x}-\vec{x}_e(\tau))\cdot\vec{v}_e(\tau)}{c|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|}\right| = \left\{\left|\frac{\vec{v}_e}{c}\right| < 1\right\} =$$

$$= 1 - \frac{(\vec{x}-\vec{x}_e(\tau))\cdot\vec{v}_e(\tau)}{c|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|}$$

Обозначим $\hat{t}$ корень функции $g(\tau)$:

$$\boxed{t - \hat{t} - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t})|}{c} = 0}$$

Заметим, что момент времени $\underline{\hat{t}<t}$.

В этих обозначениях:

$$\delta\left(t-\tau-\frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|}{c}\right) = \frac{\delta(\tau-\hat{t})}{1-\frac{(\vec{x}-\vec{x}_e(\tau))\cdot\vec{v}_e(\tau)}{|\vec{x}-\vec{x}_e(\tau)|\,c}}$$

Подставляя это в формулу для $A^0(t,\vec{x})$, получаем ответ:

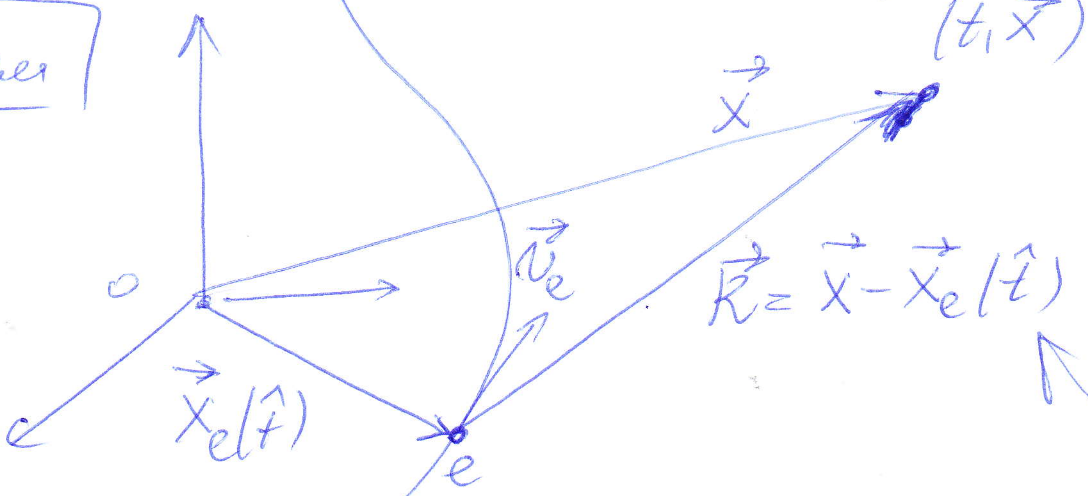
$$A^0(t,\vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t})|\left(1-\frac{\vec{v}_e(\hat{t})}{c}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t}))}{|\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t})|}\right)}$$

Совершенно аналогичный расчёт даёт для $\vec{A}(t,\vec{x})$ такой ответ:

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t})|\left(1-\frac{\vec{v}_e(\hat{t})\cdot(\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t}))}{c\,|\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t})|}\right)}\cdot\frac{\vec{v}_e(\hat{t})}{c},$$

где $\hat{t} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_e(\hat{t})|}{c}$.

Зам




Момент $\hat{t}$ отстаёт от момента наблюдения $t$ на величину $\frac{|\vec{R}|}{c}$ — столько требуется световому сигналу, чтобы попасть из точки нахождения частицы $\vec{x}_e(\hat{t})$ в точку наблюдения $\vec{x}$.

Введем обозначения: $\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_e(t)$,

$\vec{n}(t) = \frac{\vec{R}(t)}{|\vec{R}(t)|}$, $\varkappa(t) = 1 - \frac{(\vec{n}(t)\vec{v}_e(t))}{c}$.

Тогда:

$$\boxed{\begin{aligned} A^0(t,\vec{x}) &= \frac{e}{\varkappa(\hat{t})\,|\vec{R}(\hat{t})|} \\ \vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{e}{\varkappa(\hat{t})|\vec{R}|}\cdot\frac{\vec{v}(\hat{t})}{c} \\ \hat{t} &= t - \frac{|\vec{R}(\hat{t})|}{c} \end{aligned}}$$

Это так называемые <u>запаздывающие потенциалы</u> (потенциалы Лиенара-Вихерта): значение потенциалов $A^\mu$ в момент $t$ зависит от положения и скорости частицы в момент $\hat{t}$ - более <u>ранний</u> по отношению к $t$.

Для получения значений <u>наблюдаемых</u> электрического $\vec{E}$ и магнитного полей $\vec{H}$ надо продифференцировать эти потенциалы в соответствии с общей формулой:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}A^0(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H}(t,\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(t,\vec{x}) = [\vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{x})]$$

Эти дифференцирования вычисляются не очень просто, т.к. $\hat{t}$ зависит (неявно) от заданных $t$ и $\vec{x}$, что порождает ненулевые выражения для $\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}$ и $\vec{\nabla}\hat{t}$.

Мы приведём только ответ:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{e\left(1-\frac{v_e^2}{c^2}\right)\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}_e}{c}\right)}{\varkappa^3|\vec{R}|^2}\Bigg|_{\hat{t}} + \frac{e}{\varkappa^3|\vec{R}|c^2}\left[\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}_e}{c}\right)\times\vec{a}_e\right]\right]\Bigg|_{\hat{t}}$$

$$\vec{H}(t,\vec{x}) = [\vec{n}|_{\hat{t}}\times\vec{E}]$$

Здесь $\vec{a}_e(t) = \frac{d^2\vec{x}_e(t)}{dt^2}$ — вектор ускорения частицы.

В выражении для $\vec{E}$ 2 слагаемых. Одно убывает $\sim \frac{1}{|\vec{R}|^2}$, а второе $\sim \frac{1}{|\vec{R}|}$ – это поле излучения.

Заметим, что излучение возможно только при $\vec{a}_e \neq 0$: покоящийся или равномерно движущийся заряд не излучает.

Рассмотрим некоторые простые случаи.

1°. $\vec{x}_e(t) = \vec{x}_{(0)}$ – заряд покоится.

В этом случае $\vec{v}_e = \vec{a}_e = 0$ и

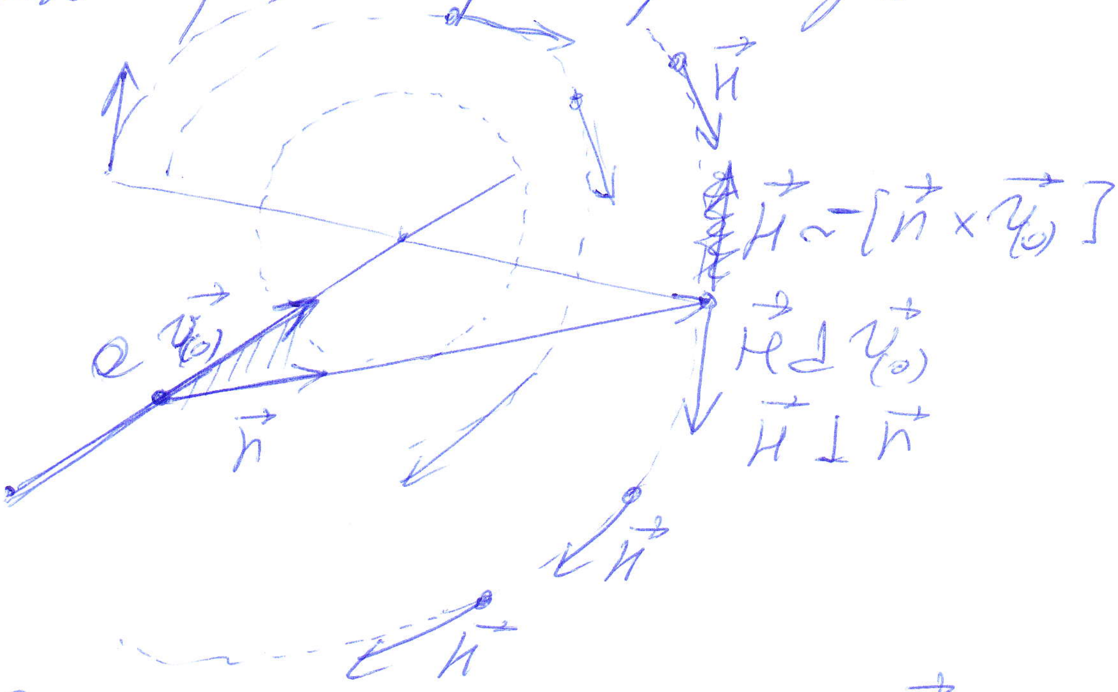
$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{x}_{(0)}|^2} \frac{(\vec{x}-\vec{x}_{(0)})}{|\vec{x}-\vec{x}_{(0)}|}$$ – Закон Кулона.

$\vec{H}(t,\vec{x}) \equiv 0$, т.к. $\vec{n} = \frac{(\vec{x}-\vec{x}_{(0)})}{|\vec{x}-\vec{x}_{(0)}|}$ и $\vec{E} \sim \vec{n}$, а $[\vec{n}\times\vec{E}] \sim [\vec{n}\times\vec{n}] \equiv 0$.

2°. $\vec{x}_e(t) = \vec{x}_{(0)} + \vec{v}_{(0)} t$ – равномерное прямолинейное движение.

$\vec{v}_e(t) = \vec{v}_{(0)} = \text{Const}$, $\vec{a}_e = 0$.

$$\vec H = -\frac{e}{\varkappa |\vec R|^2}\left[\vec n \times \frac{\vec v_{(0)}}{c}\right]\Bigg|_{\hat t}$$ – магнитное поле равномерно движущегося заряда:

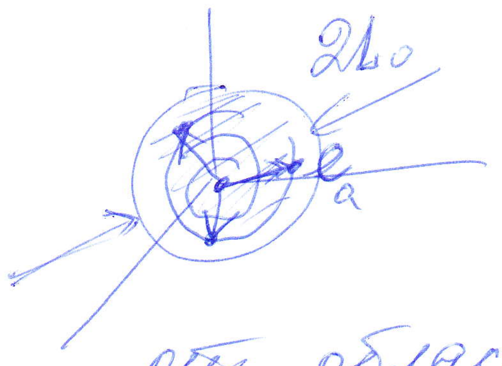



Силовые линии поля $\vec H$ – концентрические окружности с центром на прямой – траектории движения $e$.

3° Рассмотрим теперь некоторые приближения, которые позволят качественно проанализировать формулу для $\vec E$ и её физические следствия.

# Дипольный момент и дипольное излучение.

Рассмотрим систему заряженных частиц $e_a$ $1 \le a \le N$, каждая из которых движется по своему заданному закону $\vec{x}_a(t)$. Будем считать, что движения всех частиц локализованы в ограниченной области $V$ пространства $\mathbb{R}^3$: $\exists L_0 : |\vec{x}_a(t)| < L_0 \quad \forall a, \forall t$.




Выберем точку наблюдения $\vec{x}$ на большом расстоянии от области движения зарядов:

$$|\vec{x}| \gg L_0 \Rightarrow |\vec{x}| \gg |\vec{x}_a(t)| \quad \forall a, \forall t$$

Кроме того, будем считать всю систему зарядов электрически нейтральной, то есть $\sum_{a=1}^{N} e_a = 0$.

Результирующее поле в точке $\vec{x}$ в момент $t$ есть векторная сумма полей, создаваемых каждым из зарядов:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \sum_{a=1}^{N} \vec{E}_a(t,\vec{x}).$$

Пусть, вначале, все заряды покоятся:

$$\vec{x}_a(t) = \vec{x}_a = \underline{Const} \Rightarrow \vec{v}_a(t) = 0 \ \forall t.$$

Тогда $\varkappa_a = 1 - \frac{(\vec{n}_a \vec{v}_a)}{c} = 1$ и для поле $\vec{E}(t,\vec{x})$ получаем такое выражение:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a \vec{R}_a}{|\vec{R}_a|^3} = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a(\vec{x}-\vec{x}_a)}{|\vec{x}-\vec{x}_a|^3}$$

Воспользуемся приближением $|\vec{x}| \gg |\vec{x}_a|$:

$$\vec{R}_a = \vec{x} - \vec{x}_a \Rightarrow |\vec{R}_a|^2 = \vec{R}_a \cdot \vec{R}_a = \vec{x}^2 + \vec{x}_a^2 - 2(\vec{x}\vec{x}_a) =$$

$$= |\vec{x}|^2 \left(1 - \frac{2(\vec{x}\cdot\vec{x}_a)}{|\vec{x}|^2} + \frac{|\vec{x}_a|^2}{|\vec{x}|^2}\right) \simeq$$

$$\simeq |\vec{x}|^2 \left(1 - 2\frac{(\vec{n}_0 \cdot \vec{x}_a)}{|\vec{x}|} + \bar{o}\left(\frac{|\vec{x}_a|}{|\vec{x}|}\right)\right)$$

Здесь $\vec{n}_0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ — единичный вектор, направленный в точку наблюдения. Пользуясь формулой

$$\sqrt{1\pm\alpha} = 1 \pm \alpha/2 + o(\alpha) \text{ при малых } \alpha$$

получаем:

$$|\vec{R}_a| = \sqrt{\vec{R}_a^2} \approx |\vec{x}|\left(1 - \frac{(\vec{n}_0\cdot\vec{x}_a)}{|\vec{x}|}\right)$$

Теперь формула для $\vec{E}(t,\vec{x})$ упрощается:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) \approx \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a(\vec{x}-\vec{x}_a)}{|\vec{x}|^3}\left(1+3\frac{(\vec{n}_0\cdot\vec{x}_a)}{|\vec{x}|}\right) =$$

$$\approx \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{|\vec{x}|^3}\left(\vec{x}-\vec{x}_a + 3\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}(\vec{n}_0\cdot\vec{x}_a)\right)$$

В силу нейтральности системы $\sum_{a=1}^{N} e_a = 0$ и первое слагаемое зануляется.

$\boxed{O}$ Вектор $\vec{d} = \sum_a e_a\vec{x}_a$ – дипольный момент системы зарядов.

Таким образом получаем для $\vec{E}$:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{3\vec{n}_0(\vec{n}_0\cdot\vec{d}) - \vec{d}}{|\vec{x}|^3}$$

Это поле не изотропно (величина $|\vec{E}|$ зависит от направления $\vec{x}$) и убывает $\sim \frac{1}{|\vec{x}|^3}$:


$$\vec{E} = \frac{3\vec{n}_0|\vec{d}|\cos\vartheta - \vec{d}}{|\vec{x}|^3}$$

Если заряды движутся, то возникает дополнительная проблема (техническая): вклад от каждого заряда $\vec{E}_a$ требует введения своего времени запаздывания $\hat{t}_a$:

$$t - \hat{t}_a - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_a(\hat{t}_a)|}{c} = 0$$

$\Downarrow$ при $|\vec{x}| \gg \hat{x}_a(t)$

$$t - \hat{t}_a - \frac{|\vec{x}|}{c}\left(1 - \frac{(\vec{n}_0\vec{x}_a(\hat{t}_a))}{|\vec{x}|}\right) = 0$$

$$t - \hat{t}_a - \frac{|\vec{x}|}{c} + \frac{(\vec{n}_0 \vec{x}_a(\hat{t}_a))}{c} = 0$$

Пусть $\Delta t = \frac{(\vec{n}_0 \vec{x}_a)}{c}$ гораздо меньше характерного периода движения зарядов $T$:

$$\boxed{T \gg \frac{(\vec{n}_0 \vec{x}_a)}{c} \simeq \frac{|\vec{x}_a|}{c}} \quad (\star)$$

(т.е. за время $\Delta t$ поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$ меняются мало). Тогда можно использовать одно запаздывающее время: $t - \hat{t} + \frac{|\vec{x}|}{c} = 0$

для всех зарядов.

Физически условие ($\star$) интерпретируется так:

$$Tc \gg |\vec{x}_a| \sim L_0$$

Но $Tc$ – длина волны излучения:

$$\lambda_{изл.} \gg L_0 .$$

Длина волны излучения должна быть существенно больше характерних размеров области движения зарядов. ~~[illegible]~~ ~~то~~

Перепишем условие (~~A~~) со стр. =13= виде так:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|\vec{x}_a|}{T} \ll c \\ \text{Но } \dfrac{|\vec{x}_a|}{T} \sim |\vec{v}_a| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|\vec{v}_a|}{c} \ll 1 \;-$$

— заряды движутся с нерелятивистскими скоростями.

Рассмотрим в этом приближении главный порядок "излучательного" слагаемого в $\vec{E}$ (того, которое $\sim \frac{1}{|\vec{R}|}$). Главный порядок означает, что мы будем пренебрегать всеми слагаемыми $\sim \frac{|\vec{v}|}{c}$ или $\frac{|\vec{x}_a|}{|\vec{X}|}$.

В главном приближении:

$$\varkappa = 1 - \frac{(\vec{n}_a \vec{v}_a)}{c} \simeq 1$$

$$|\vec{R}_a| = |\vec{X}| \left(1 - \frac{(\vec{n}_0 \vec{x}_a)}{|\vec{X}|}\right) \simeq |\vec{X}|$$

и мы имеем следующее: 

$$\vec{E}_{изл}(t,\vec{x}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{c^2 |\vec{R}_a| \varkappa_a^3} \left[\vec{n}_a \times \left[\left(\vec{n}_a - \frac{\vec{v}_a}{c}\right)\times \vec{a}_a\right]\right] = \Bigg|_{\hat{t}_a}$$

$$\simeq \frac{\left[\vec{n}_0 \times \left[\vec{n}_0 \times \sum_{a=1}^{N} e_a \vec{a}_a\right]\right]}{c^2 |\vec{x}|}\Bigg|_{\hat{t} = t - \frac{|\vec{x}|}{c}}$$

$$\sum_{a=1}^{N} e_a \vec{a}_a = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{a=1}^{N} e_a \vec{x}_a(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{d}(t) \equiv \ddot{\vec{d}}(t)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{E}_{изл}(t,\vec{x}) = \frac{\left[\vec{n}_0 \times \left[\vec{n}_0 \times \ddot{\vec{d}}(\hat{t})\right]\right]}{|\vec{x}|\, c^2} \\ \vec{n}_0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \hat{t} = t - \frac{|\vec{x}|}{c}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{H}_{изл} \simeq \left[\vec{n}_0 \times \vec{E}_{изл}\right] = \frac{1}{|\vec{x}|\, c^2}\left[\vec{n}_0 \times \left(\vec{n}_0(\vec{n}_0 \ddot{\vec{d}}) - \ddot{\vec{d}}\right)\right] = \\ = \frac{\left[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}_0\right]}{|\vec{x}|\, c^2}\Bigg|_{\hat{t}}\end{gathered}}$$

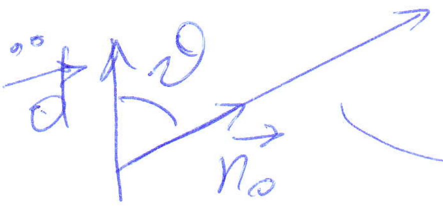
Это напряжённости поля излучения в дипольном приближении

Видно, что $\vec{H}_{изл} \perp \vec{n}_0$, $\vec{E}_{изл} \perp \vec{n}_0$,

$\vec{H}_{изл} \perp \vec{E}_{изл}$ и $|\vec{E}_{изл}| = |\vec{H}_{изл}|$

$$|\vec{E}_{изл.}|^2 = \frac{\left(\vec{n}_0(\vec{n}_0\ddot{\vec{d}}) - \ddot{\vec{d}}\right)^2}{c^4|\vec{x}|^2} =$$

$$= \frac{(\ddot{\vec{d}})^2 - (\vec{n}_0\ddot{\vec{d}})^2}{c^4|\vec{x}|^2} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2\sin^2\vartheta}{c^4|\vec{x}|^2}$$




Найдём теперь величину потока энергии излучения. Для этого вычислим вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_{изл}\times\vec{H}_{изл}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_{изл}\times[\vec{n}_0\times\vec{E}_{изл}]\right] =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(\vec{n}_0|\vec{E}_{изл.}|^2 - \vec{E}_{изл}\underbrace{(\vec{n}_0\cdot\vec{E}_{изл})}_{=0}\right) =$$

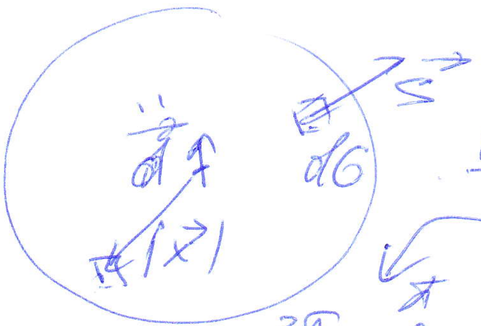
$$= \frac{c}{4\pi}\vec{n}_0|\vec{E}_{изл.}|^2$$

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{|\ddot{\vec{d}}|^2\sin^2\vartheta}{c^4|\vec{x}|^2} = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2\sin^2\vartheta}{c^3\,4\pi|\vec{x}|^2}$$

Это — плотность потока энергии в единицу времени в направлении, задаваемым углом $\vartheta$.

Поток энергии <u>максимален</u> в направлении $\vec{n}_0 \perp \ddot{\vec{d}}$ и отсутствует в направлении $\vec{n}_0 \parallel \ddot{\vec{d}}$ $(\vartheta = 0)$.

Получим интегральную <u>мощность</u> излучения (энергия, излучаемая системой в единицу времени во всех направлениях). Для этого проинтегрируем $|\vec{S}|$ по сфере радиуса $\vec{X}$:




$$\underline{d\sigma = |\vec{x}|^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}$$

$$W = \oint (\vec{S}\vec{n}_0)\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\vec{x}|^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 =$$

$$= \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{4}\sin\vartheta - \frac{1}{4}\sin(3\vartheta) \right) d\vartheta =$$

$$= \underline{\frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3}}$$

Пример 1: Периодические колебания: $\vec{d} = \vec{d}_0 \sin\omega t$

$$\ddot{\vec{d}} = -\omega^2 \vec{d}_0 \sin\omega t$$

$$W = \frac{2}{3} |\vec{d}_0|^2 \frac{\omega^4}{c^3} \sin^2\omega t$$

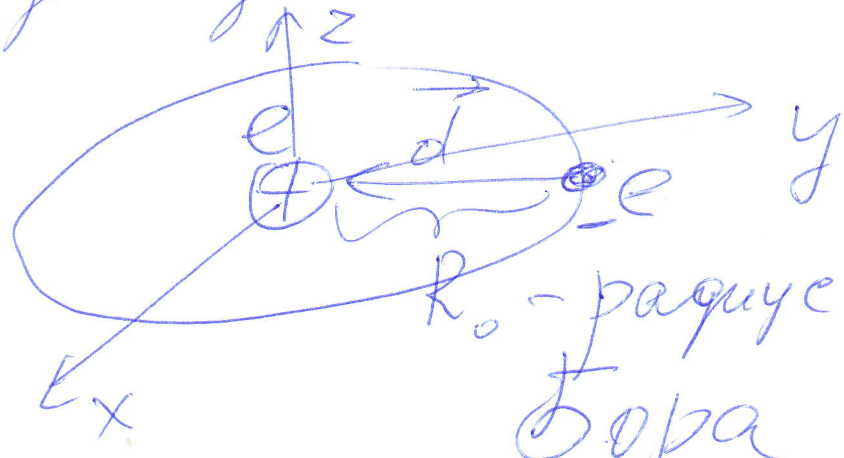
Мощность излучения $\sim \omega^4$ (резко растёт с увеличением частоты).

Средняя энергия за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T W(t)\,dt = \frac{|\vec{d}_0|^2}{3c^3}\omega^4$$

Пример 2

Оценить время $-$ атома водорода в предположении справедливости классической электродинамики для движения электрона:




$R_0$ – радиус Бора

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -eR_0\cos\omega t \\ -eR_0\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{d}} = eR_0\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ 0\end{pmatrix} = -\omega^2\vec{d}$$

Частоту вращения оценим по 2му закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{кул} \Rightarrow m\omega^2 R_0 = \frac{e^2}{R_0^2}\Bigg) \Rightarrow$$

(m - масса электрона).

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{e^2}{mR_0^3}$$

$$|\ddot{\vec{d}}|^2 = e^2R_0^2\omega^4 = \frac{e^6}{m^2R_0^4}$$

Мощность излучения:

$$W = \frac{2}{3}|\ddot{\vec{d}}|^2\frac{1}{c^3} = \frac{2e^6}{3m^2c^3R_0^4}$$

Полный запас энергии электрона

$$\sim \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2R_0^2}{2} = \frac{e^2}{2R_0}$$

Поэтому за время $\Delta t = \frac{mv^2}{2W}$

электрон должен упасть на ядро.

Это время крайне <u>мало</u>: $\Delta t \sim 10^{-10}$ сек.