Пирковский Алексей Юльевич

aupirkovskii@hse.ru, pirkosha@gmail.com

1 От спектрального радиуса к основной теореме алгебры

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

"Основная теорема алгебры" утверждает, что всякий отличный от константы многочлен над полем комплексных чисел имеет корень. Имеется много различных доказательств этой теоремы, опирающихся на методы из разных областей математики (алгебры, комплексного анализа, топологии...). Предлагается разобрать статью Е. А. Горина (Матем. просв., сер. 3, 1997, вып. 1, 71–84), в которой дается интересное доказательство этой теоремы, основанное на методах спектральной теории нормированных алгебр (знать которую для понимания статьи совершенно не нужно). Необходимо восполнить все детали, пропущенные в статье!

2 Характеризация многочленов в терминах обнуления производных

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Ясно, что у любого многочлена все производные, начиная с некоторой, тождественно равны нулю. Требуется доказать обратное утверждение: если бесконечно дифференцируемая функция на прямой такова, что для каждой точки $t \in \mathbb{R}$ существует такое n, что n-ая производная функции в точке t равна нулю, то функция — многочлен. Для решения задачи полезно ознакомиться с теоремой Бэра и понятием множества первой категории.
Литература: Дж. Окстоби, Мера и категория. М.: Мир, 1974.

3 Конечномерные операторные алгебры

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Под операторными алгебрами обычно понимают ассоциативные алгебры, состоящие из линейных операторов в банаховых (чаще всего — гильбертовых) пространствах. Принято считать, что эти алгебры и пространства, в которых они действуют, как правило, бесконечномерны. Однако никто не запрещает рассматривать операторные алгебры и в конечномерных векторных пространствах. Разумеется, многие понятия и теоремы из этой науки в конечномерном случае становятся существенно проще. Однако это не значит, что они становятся тривиальными. Предлагается разобраться в некоторых понятиях, связанных с конечномерными операторными алгебрами, и решить ряд задач на эту тему. Для этого вполне достаточно знаний по линейной алгебре в объеме первого курса. Разные задачи по этой теме могут стать предметами разных курсовых работ.
Литература: И. М. Глазман, Ю. И. Любич, Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969; M. Shubin, Von Neumann algebras and L^2-techniques in geometry and topology (глава 1).

4 Функции от коммутирующих операторов

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Пусть $f \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен от одной переменной и T — линейный оператор в векторном пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Если в многочлен f вместо независимой переменной подставить оператор T, то получится оператор $f(T)$. Аналогичная конструкция имеет смысл, когда f — многочлен от нескольких переменных, а $T = (T_1, \dots, T_n)$ — набор коммутирующих между собой линейных операторов. А какие еще функции, кроме многочленов, можно применять к оператору или к набору коммутирующих операторов? Ответ зависит от того, как устроены эти операторы. Предлагается разобраться в этом вопросе для случая, когда векторное пространство X конечномерно. Для решения этой задачи достаточно обычной линейной алгебры.
Литература: А. Ю. Пирковский, Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов (глава 1). М.: МЦНМО, 2010.

5 Совместный спектр Тэйлора

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов.

Эта тема связана с предыдущей, но требует несколько большего багажа знаний. Пусть f — голоморфная функция n переменных и $T = (T_1, \dots, T_n)$ — набор коммутирующих между собой линейных операторов в банаховом пространстве X. Можно ли придать разумный смысл выражению $f(T_1, \dots, T_n)$? Чтобы ответить на этот вопрос, Дж. Тэйлор в начале 1970-х гг. придумал весьма содержательное, хотя и несколько неожиданное определение совместного спектра набора операторов, основанное на некоторых понятиях гомологической алгебры. Предлагается разобраться в основах тэйлоровской теории и вычислить совместный спектр в ряде конкретных случаев. Вариант задачи, доступный и второкурсникам: доказать, что в конечномерном случае спектр Тэйлора совпадает с множеством совместных собственных значений набора операторов.
Литература: J. L. Taylor, *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Functional Analysis 6 (1970), 172–191; R. E. Curto, *Taylor joint spectrum.* Preprint (2002); А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, М.: МГУ, 1986 (гл. V.1 и VI.1).

6 Алгебры с делением: вокруг теорем Фробениуса и Гельфанда–Мазура

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов.

Классическая теорема Фробениуса гласит, что над полем $\mathbb{R}$ есть ровно три конечномерные ассоциативные алгебры с делением: само поле $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и алгебра кватернионов $\mathbb{H}$. Если в качестве основного поля взять $\mathbb{C}$ вместо $\mathbb{R}$, то список сократится: единственная конечномерная $\mathbb{C}$-алгебра с делением — это $\mathbb{C}$ (и это утверждение, в отличие от теоремы Фробениуса, доказывается очень просто). Теорема Гельфанда–Мазура — это обобщение теоремы Фробениуса и ее комплексного аналога на случай нормированных алгебр с делением (не предполагаемых заранее конечномерными). Ответ, однако, получается тот же самый, что и в конечномерном случае. Эта теорема была анонсирована С. Мазуром в 1938 г.; первое опубликованное доказательство (над полем $\mathbb{C}$) принадлежит И. М. Гельфанду (1941). Предлагается разобраться в доказательствах теорем Фробениуса и Гельфанда–Мазура, а также в некоторых близких по духу утверждениях, и в их следствиях. Например, из «счетномерного» обобщения комплексной теоремы Фробениуса можно вывести теорему Гильберта о нулях (Ш. Амицур).
Литература: Ю. В. Бахтурин, *Основные структуры современной алгебры*, М.: Наука, 1990; А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, М.: МЦНМО, 2004; W. Żelazko, *Banach algebras*, Elsevier, 1973; V. M. Bogdan, *On Frobenius, Mazur, and Gelfand-Mazur theorems on division algebras*, Quaest. Math. 29:2 (2006), 171–209; N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.

7 Границы Шилова и их обобщения

7.1 Границы Шилова функциональных алгебр

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов.

Пусть A — подалгебра в алгебре всех непрерывных функций на компакте X. Подмножество в X называется *границей* для A, если для любой функции из A максимум ее модуля достигается на этом подмножестве. *Граница Шилова* алгебры A — это наименьшая замкнутая граница в X. Например, граница Шилова алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на X — это весь компакт X. Если же X — замкнутый круг на комплексной плоскости, а алгебра A состоит из функций, непрерывных на X и голоморфных внутри X, то граница Шилова алгебры A — это окружность ∂X (это следует из принципа максимума модуля). Предлагается найти границу Шилова для нескольких конкретных функциональных алгебр. Возможно дальнейшее развитие этой темы — нахождение других границ, например, границы Шоке, точек пика и т.п.

Литература: И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960; М. А. Наймарк, Нормированные кольца. М.: Наука, 1968; Т. Гамелин, Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973; E. L. Stout, *The theory of uniform algebras*, Bogden & Quigley, 1971.

7.2 Высшие границы Шилова

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам, освоившим вводный курс функционального анализа.

Высшие границы Шилова функциональных алгебр $A \subset C(X)$ были введены в 1975–1976 гг. в работах Р. Бэйсенера и Н. Сибони. Они образуют возрастающую цепочку $\partial_0 A \subset \partial_1 A \subset \ldots$ замкнутых подмножеств X, где $\partial_0 A$ — "обычная" граница Шилова, а множества $\partial_n A$ при $n \geq 1$ определяются в терминах максимумов функций из A, ограниченных на "A-гиперповерхности коразмерности n" в X. Предлагается разобрать несколько эквивалентных определений высших границ Шилова и вычислить их для ряда конкретных примеров.

Литература: R. E. Basener, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 98–104; N. Sibony, Lecture Notes in Math. 512 (1976), 139–165; R. E. Basener, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 8, 2397–2402; T. Tonev, Lecture Notes in Math. 1277 (1987), 139–165; T. Tonev, *Big-planes, boundaries and function algebras*, Elsevier, 1992.

7.3 Некоммутативные границы Шилова

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам, освоившим вводный курс функционального анализа.

Понятие "некоммутативной границы Шилова" для несамосопряженной подалгебры A в C^*-алгебре B было введено в работах У. Арвесона в начале 1960-х гг. В коммутативном случае $B = C(X)$ это понятие сводится к "классической" границе Шилова (см. выше). Сравнительно недавно некоммутативные границы Шилова были использованы Л. Л. Ваксманом и его последователями для доказательства "принципа максимума" для "голоморфных функций" на некоторых квантовых ограниченных симметрических областях. Предлагается разобрать несколько эквивалентных подходов к некоммутативным границам Шилова и вычислить их для ряда конкретных примеров.

Литература: W. B. Arveson, Acta Math. **123** (1969), 141–224; D. P. Blecher and C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules*, Oxford, 2004; Л. Л. Ваксман, Математическая физика, анализ и геометрия, 10 (2003), N 1, 12–28; D. Proskurin and L. Turowska, Algebr. Represent. Theory **18** (2015), no. 4, 917–929; J. Johansson and L. Turowska, Oper. Matrices **12** (2018), no. 1, 39–53; O. Bershtein, O. Giselsson, and L. Turowska, arXiv:1711.05981 [math.OA].

8 Тензорные произведения функциональных пространств

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам, освоившим вводный курс функционального анализа.

В функциональном анализе, в отличие от алгебры, нет единственной канонической конструкции тензорного произведения. Если, скажем, E и F — нормированные пространства, то на их алгебраическом тензорном произведении $E \otimes F$ существует целая серия естественных, но не эквивалентных другу норм. Среди таких норм есть наибольшая (называемая *проективной*) и наименьшая (называемая *инъективной*). Аналогичные конструкции имеют смысл и для более общих топологических векторных пространств. Проективная норма «хорошо себя ведет» в применении к пространствам типа $L^1(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой), а инъективная — в применении к пространствам типа $C(X)$ (где X — компакт), но не наоборот. Есть только один — впрочем, весьма важный — класс топологических векторных пространств, для которого проективное и инъективное тензорные произведения совпадают. Этот класс состоит из *ядерных* пространств, к которым относятся, в частности, многие пространства гладких и голоморфных функций. Предлагается разобраться в основных понятиях этой теории и описать тензорные произведения некоторых функциональных пространств в явном виде.

Литература: R. A. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer, 2002; А. Я. Хелемский, Гомология в банаховых и топологических алгебрах, М.: МГУ, 1986.

9 Оператор левого сдвига не является обобщенным скалярным

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам, освоившим вводный курс функционального анализа.

Ограниченный линейный оператор T в комплексном банаховом пространстве X называется *обобщенным скалярным*, если он допускает так называемое *гладкое функциональное исчисление*, т.е. непрерывный гомоморфизм из алгебры гладких функций $C^\infty(\mathbb{C})$ в алгебру ограниченных операторов $\mathcal{B}(X)$, переводящий координатную функцию z в оператор T. Обобщенных скалярных операторов много; таковы, например, все нормальные операторы в гильбертовом пространстве. По-видимому, самый простой пример оператора, не являющегося обобщенным скалярным, — это оператор левого сдвига в пространстве ℓ^2. Этот факт хорошо известен, однако, по-видимому, единственное известное его доказательство является следствием весьма мощной и непростой теории, развитой в целой серии работ различных авторов. Интересно было бы попытаться выяснить, так ли уж необходимо «стрелять из пушки по воробьям», и попробовать придумать более или менее элементарное доказательство этого факта.

Литература: А. Ю. Пирковский, Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. М.: МЦНМО, 2010; K. B. Laursen, Local spectral theory. In: H. G. Dales, P. Aiena, J. Eschmeier, K. Laursen, and G. A. Willis, Introduction to Banach algebras, operators, and harmonic analysis. Cambridge Univ. Press, 2003.

10 Алгебры голоморфных функций на квантовом шаре и квантовом полидиске

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам, освоившим вводный курс функционального анализа.

Алгебры, о которых идет речь в названии темы, представляют собой некоммутативные аналоги (деформации) алгебр голоморфных функций на полидиске и на шаре в $\mathbb{C}^n$. Они были сравнительно недавно введены А. Ю. Пирковским, и про них есть ряд открытых вопросов, например: (1) чему равны их глобальные размерности, и (2) является ли алгебра голоморфных функций на квантовом шаре голоморфно конечно порожденной?

Литература: arXiv 1204.4936, 1304.1991, 1311.0309, 1508.05768.