Сопряженные пространства и операторы. Рефлексивность

3.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2_p$ — плоскость, снабженная нормой $\|\cdot\|_p$, и пусть $X_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x, 0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует линейных функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

3.2. Существует ли такая функция $f \in L^2[0, 1]$, что $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = g(0)$ **(a)** для каждого многочлена g степени $\leqslant n$; **(b)** для каждого многочлена g?

3.3. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство, $h \in X \setminus X_0$. Докажите, что существует такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$, $f|_{X_0} = 0$ и $f(h) = \operatorname{dist}(h, X_0)$.

3.4. Постройте изометрические изоморфизмы **(a)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **(b)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$; **(c)** $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$, где $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Можно ли тем же способом построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

3.5-B. Докажите, что c_0 не является топологически изоморфным сопряженному ни к какому нормированному пространству.

3.6-B. Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Постройте изометрические изоморфизмы **(a)** $L^\infty(X, \mu) \xrightarrow{\sim} (L^1(X, \mu))^*$; **(b)** $L^p(X, \mu) \xrightarrow{\sim} (L^q(X, \mu))^*$, где $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$.
Подсказка. Для доказательства сюръективности построенных отображений пригодится теорема Радона–Никодима.

3.7. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует неограниченный линейный функционал.

Подсказка: воспользуйтесь тем, что в любом векторном пространстве есть алгебраический базис (т.е. максимальное линейно независимое подмножество).

3.8. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное векторное подпространство не более чем счетной размерности.

3.9. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

3.10. Докажите, что пространства c_0, $C[a, b]$, ℓ^p, $L^p[a, b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a, b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

3.11. **(a)** Докажите, что каждое нормированное пространство X может быть изометрически вложено в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S. **(b)** Докажите, что каждое сепарабельное нормированное пространство X может быть изометрически вложено в ℓ^∞.

3.12. Пусть X — нормированное пространство.
(a) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
(b) Верно ли обратное?
(c) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

3.13. Докажите, что
(a) гильбертово пространство рефлексивно;
(b) c_0 нерефлексивно;
(c) ℓ^1 нерефлексивно;
(d) $L^1[a, b]$ нерефлексивно;
(e) $C[a, b]$ нерефлексивно.

3.14 (*сопряженный оператор*)**.** Пусть X и Y — нормированные пространства, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Определим отображение $T^*\colon Y^* \to X^*$ формулой $T(f) = f \circ T$. Покажите, что T^* ограничен и $\|T^*\| = \|T\|$.

3.15. Опишите в явном виде сопряженные следующих операторов:
(a) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0 (см. задачу 2.9);
(b) операторы *левого сдвига* T_ℓ и *правого сдвига* T_r, действующие в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0 следующим образом:

$$T_\ell(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots), \qquad T_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots);$$

(c) оператор *двустороннего сдвига*, действующий в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$ по правилу $T(x)_i = x_{i-1}$ ($i \in \mathbb{Z}$);
(d) оператор «первообразной» в $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. задачу 2.11);
(e) интегральный оператор Гильберта-Шмидта в $L^2(X, \mu)$ (см. задачу 2.12).

3.16. Пусть X — нормированное пространство и $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Докажите, что для каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

3.17. Пусть X и Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Докажите, что T является топологическим (соответственно, изометрическим) изоморфизмом тогда и только тогда, когда этим свойством обладает его сопряженный $T^*\colon Y^* \to X^*$.
(*Терминология:* топологический изоморфизм = линейный гомеоморфизм.)

3.18. Пусть X — нормированное пространство, $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Найдите связь между операторами $i_{X^*}\colon X^* \to X^{***}$ и $i_X^*\colon X^{***} \to X^*$.

3.19. **(a)** Докажите, что банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда X^* рефлексивно.
(b) Докажите, что ℓ^1, ℓ^∞, $L^\infty[a,b]$ нерефлексивны.