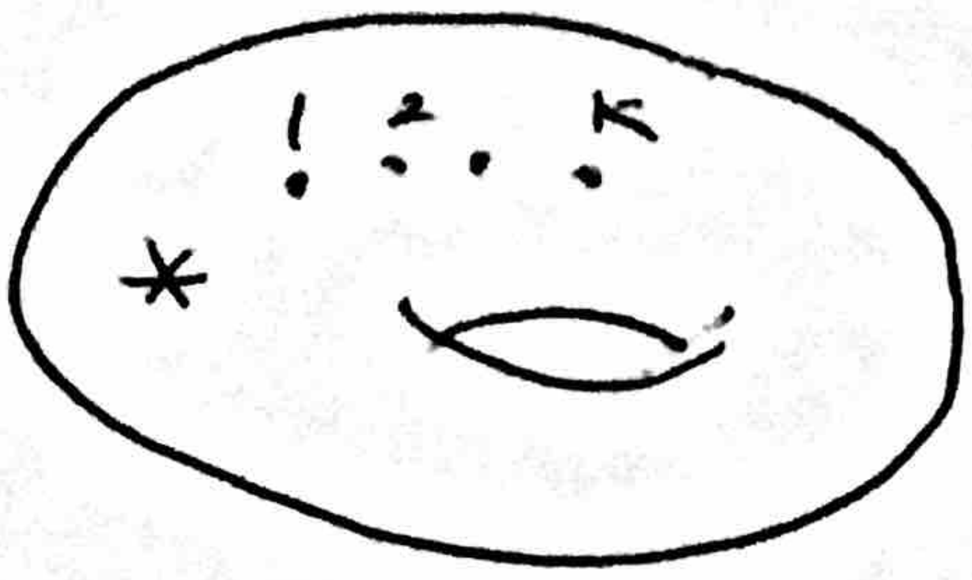
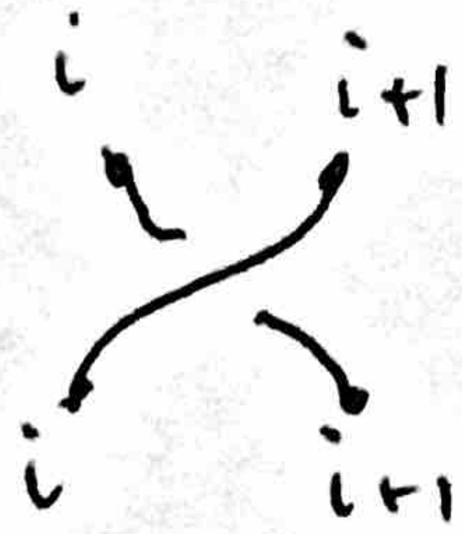
Лекция 4



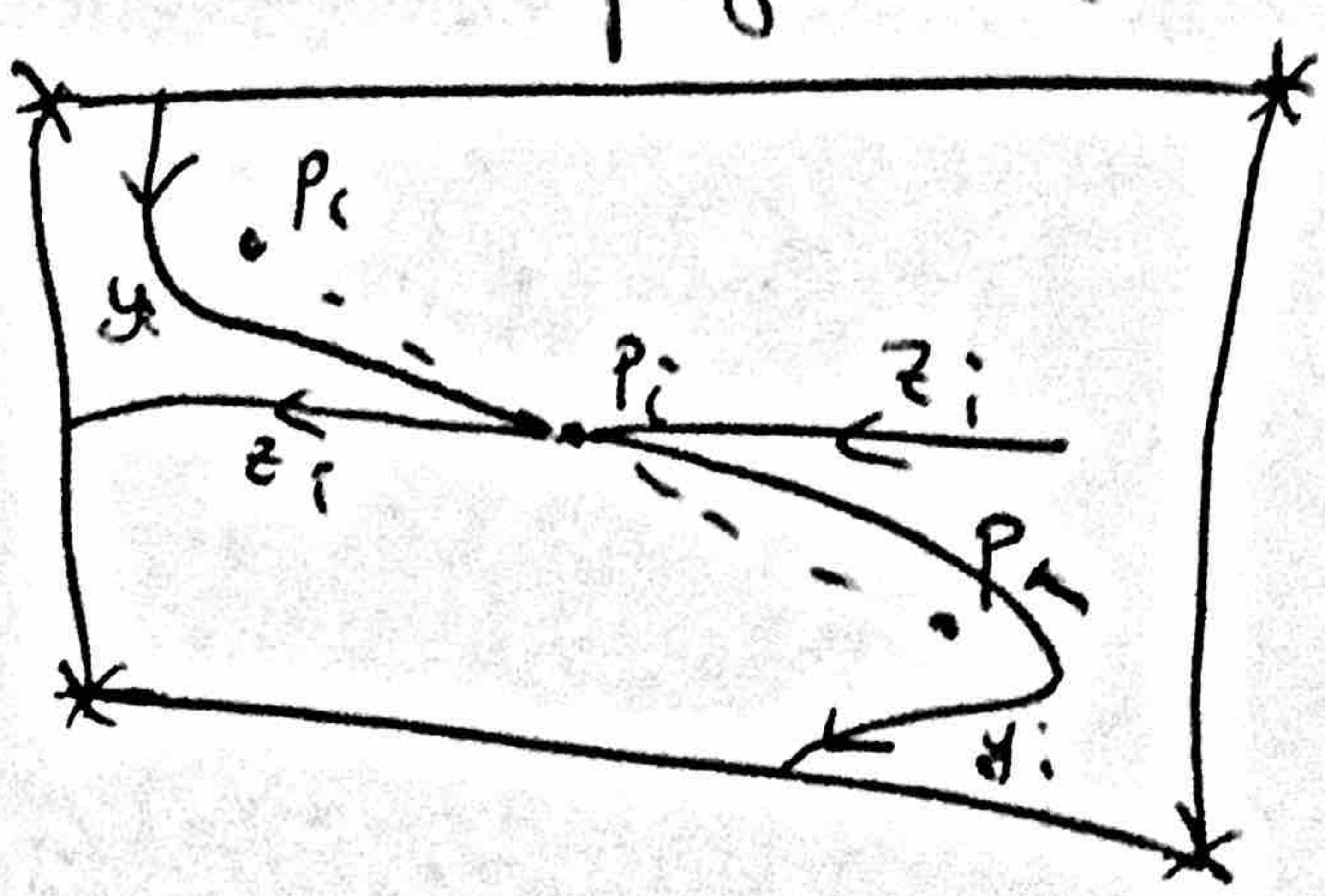
$V_k \approx$ k точек на торе с отмеченной точкой.

в $\mathbb{T}\times[0,1]$:

T_i :



y_i, z_i : точка i обходит вокруг параллели меридиана



Теор Группа кос на торе $= \pi_1$(k различных точек на $\mathbb{T} - *$) порождена T_i, y_i, z_i с соотношениями

$$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}, \quad T_iT_j = T_jT_i \quad |i-j|\geq 2$$

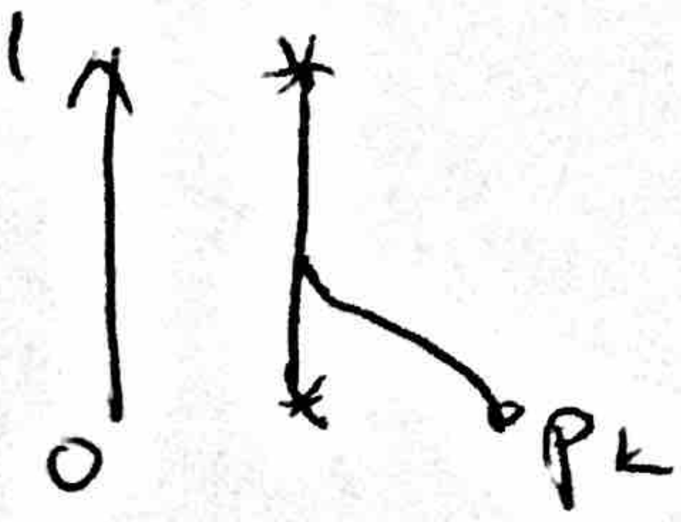
$$y_iT_j = T_jy_i \qquad z_iT_j = T_jz_i \quad (i\neq j, i+1)$$

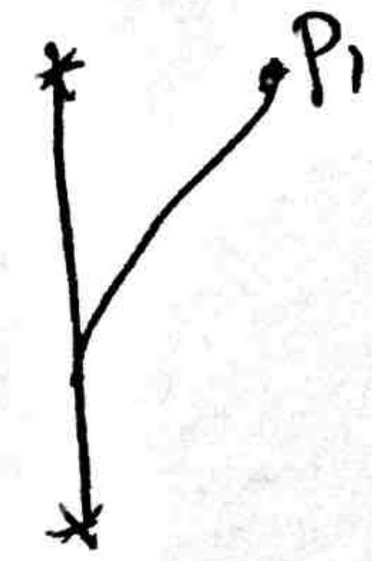
$$y_{i+1} = T_i^{-1}y_iT_i^{-1} \qquad z_{i+1} = T_iz_iT_i$$

$$y_iy_j = y_jy_i \qquad z_iz_j = z_jz_i$$

$$\boxed{z_1T_1y_1T_1^{-1} = T_1^{-1}y_1T_1^{-1}z_1}$$

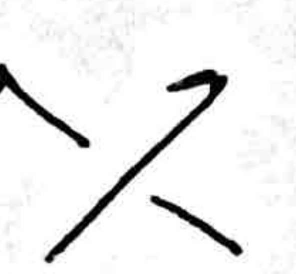
Упр (Меллит) Эти соотношения выполняются в $A_{q,t}$.

d_- убивает последнюю точку p_k 

d_+ рождает p_1 

Инварианты узлов:

Многочлен HOMFLY задается соотношениями

a  $- a^{-1}$  $= (q-q^{-1})$ 

$$\bigcirc = \frac{a-a^{-1}}{q-q^{-1}}$$

NB: $a=q^2$ многочлен Джонса
$a=1$ многочлен Александера

Это многочлен Лорана по a, коэффициенты которого — рац. функции по q. Если K = узел (i.e. одна комп. связности)

то $\dfrac{P(K)}{P(\bigcirc)}$ = многочлен Лорана по a и q.

Хованов и Розанский придумали категорификацию многочлена Хомфли (используя бимодули Зоргеля): это комплекс (кот. строится по диаграмме узла), гомологии которого $\mathcal{H}^{i,j,k}$ трижды градуированы. Эйлерова характеристика:

$$\sum (-1)^i q^j a^k \dim \mathcal{H}^{i,j,k} = \frac{P(K)}{P(\bigcirc)}$$

У гомологий Хованова-Розанского много интересных и важных свойств, но их не так просто вычислить.

<u>Thm (Г.) = Теор. (Ногансамп)</u>

торический узел

$(\nabla e_n, e_n)$ = многочлен Пуанкаре для усл. гомологий Хованова - Розанского $T(n,n+1)$ с минимальной степенью по a.

$(\nabla e_n, \sum (-1)^k a^k s)$ = полный многочлен Пуанкаре.

<u>Еще:</u> (а) $(\nabla^m e_n, \sum (-1)^k a^k s) =$ —— / —— (Ногансамп). для $T(n, mn+1)$.

(б) (Mellit) $(P_{m,n}(1), \sum (-1)^k a^k s) =$ —— / —— для $T(n,m)$.

где $P_{m,n}$ = некоторый оператор на $V_0 \subset \Lambda$ (см. ниже). и НОД$(m,n) = 1$.

(в) (G.-Negut) $P_{m,n}(\Delta)$ = "refined Chern-Simons invariant" для торического узла $T(m,n)$, введенный Аганагич, Шакировым и Чередником.

<u>Ключевая идея</u>: все эти гомологии сосредоточены в чётных гомологических степенях! Если есть точная тройка $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ и гомологии $A^\cdot$ и $C^\cdot$ чётные, то гомологии $B^\cdot$ тоже чётные и $\dim H^i(B) = \dim H^i(A) + \dim H^i(C)$.

~~Из~~ Пользуясь этим ~~[illegible]~~ соображением, Хоганкамп построил довольно сложную рекурсию для гомологий Х-Р $T(n,n+1)$ и сравнил ее с рекурсией для ∇e_n.

Как можно думать про оператор $P_{m,n}$?

Способ 1: $V_0 \xrightarrow[\text{создали точку}]{} V_1 \xrightarrow[\text{обвели вокруг тора}]{} V_1 \xrightarrow[\text{уничтожили в отмеченной точке}]{} V_0$

d_+ $\qquad$ $x_1, y_1, \dots$ $\qquad$ d_-

$$P_{m,n} = d_-(z_1^{s_1} y, z_2^{s_2} \dots) d_+$$

где $s_i \approx \left\lfloor \frac{im}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(i-1)m}{n} \right\rfloor$

Способ 2 Использовать действие $SL(2,\mathbb{Z})$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Им соответствуют автоморфизмы $A_{q,t} \to A_{q,t}$ (не обратимые).

$$N P_{m,n} N^{-1} = P_{m,n+m}$$

Это примерно инволюция N из предыдущей лекции

$$S P_{m,n} S^{-1} = P_{m+n,n}$$

$$S P_{m,1} S^{-1} = P_{m+1,1}$$

Напомним, что $P_{m,1} = F[X + (q-1)(t-1)y]\, \mathrm{Exp}[-y^{-1}X]\big|_{y^{-m}}$

$= F[X + (q-1)(t-1)y]\, y^{m-1}\, \mathrm{Exp}[-y^{-1}X]\big|_{y^{-1}}$

~~$N \ldots = y_1 c_+$~~

$\phi: \mathbb{A}_{q,t} \to \mathbb{A}_{q,t}$ algebra homomorphism

q, t - линейный

$T_i \to T_i$

$d_- \to d_-$

$d_+ \to d_+$

$d_+^* \to q^{-k} z_1 d_+$

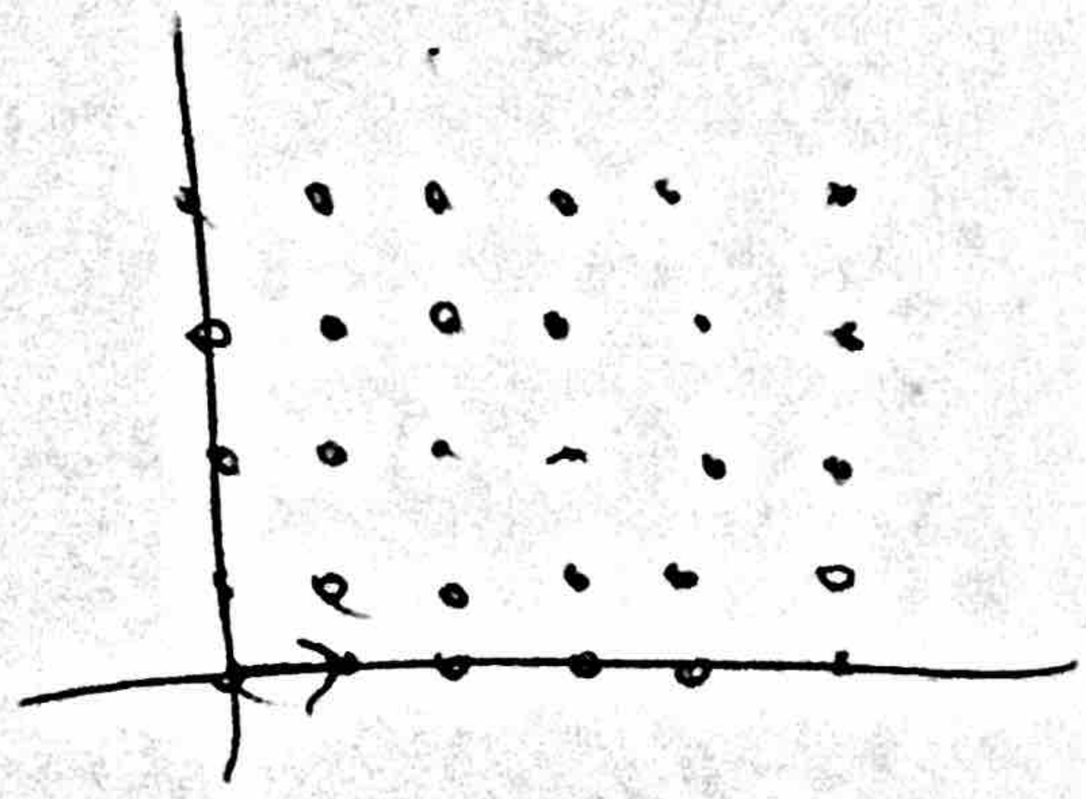
$z_1 \to -qty_1 z_1$

$d_- d_+^* \to$

$\} \to d_- z_1 d_+$

Осталось заметить, что алгебра, порожденная $P_{m,n}$ = часть $\mathbb{A}_{q,t}$, переводящая V_0 в V_0, является очень важной алгеброй. Она известна под многими именами:

- Алгебра Динга – Иохара
- Шафеви-алгебра
- $U_{q,t}(\widehat{\widehat{gl}}_1)$
- Эллиптическая алгебра Холла
- DAHA(GL_∞) (сферическая).



В частности: образующие = $P_{m,n}$

Соотношения: $[P_x, P_y] = \_\_ P_{x+y}$, если в треугольнике $\xrightarrow{x}\xrightarrow{y}$, $x+y$ нет целых точек.

$P_{k,0}$ = оператор умножения на p_k

$P_{1,0}$ = оператор умножения на e_1

$$P_{k,1}f = F[X + (q-1)(t-1)y]\,\mathrm{Exp}[-y^{-1}X]\Big|_{y^{-k}}$$

(Shiraishi et al.,
Bergeron et.al.)

$$[P_{1,0}, P_{k,1}] = P_{k+1,1} \quad \left(\text{т.к. } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1\right).$$

<u>Теор</u> (Schiffmann-Vasserot, Feigin-Tsymbaliuk, Negut)
∃ Эллиптическая алгебра Холла действует
на $K_{\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{Hilb}^n\,\mathbb{C}^2)$.

Это согласуется с действием $A_{q,t}$ на
$K_{\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(PFH^{n,n+k})$, построенным на
второй лекции.