Лекция 2 Геометрия

Напоминание:

$$\mathbb{A}_{q,t} \supset \mathbb{A}_q = \langle d_+, d_-, T_i, y_i \rangle$$
$$\mathbb{A}_{q,t} \supset \mathbb{A}_{q^{-1}} = \langle d_+^*, d_-, T_i^{-1}, z_i \rangle$$

Лемма: $[d_+, d_-] = (q-1) T_1 \ldots T_{k-1} y_k$

$\Rightarrow y_i$ выражаются через d_+, d_-, T_i.

$$\mathbb{B}_{q,t} := \langle d_+, d_-, T_i, z_i \rangle = \langle d_+, d_-, T_i^{\pm 1}, y_i, z_i \rangle \subset \mathbb{A}$$

т.е. все, кроме d_+^*

$$V = \bigoplus_{k \geq 0} V_k, \quad V_k = \Lambda(q,t)[y_1 \ldots y_k]$$

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, shift left, "d_+"] & V_1 \arrow[l, shift left, "d_-"] \arrow[r, shift left, "d_+"] \arrow[loop below, "{y_1, z_1}"] & V_2 \arrow[l, shift left, "d_-"] \arrow[r, shift left, "d_+"] \arrow[loop below, "{T_1, y_1, y_2, z_1, z_2}"] & V_3 \arrow[l, shift left, "d_-"] \arrow[r, shift left] \arrow[loop below, "{T_1, T_2, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3}"] & \ldots \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

Сегодня: Построим пространства $\mathcal{X}_k$, с действием $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ т.ч. $K_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*}(\mathcal{X}_k) \simeq V_k$

d_+, d_-, T_i, y_i, z_i = геометрические операторы между $\mathcal{X}_k$.

$$\mathcal{X}_0 = \bigsqcup_n \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2).$$ ← схема Гильберта точек на плоскости

Опр | $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2 = \left\{ I \subset \mathbb{C}[x,y],\ I = \text{идеал},\ \dim \frac{\mathbb{C}[x,y]}{I} = n \right\}$

Опр 2 $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2 = \left\{ (X,Y,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} v\in\mathbb{C}^n \\ X,Y = n\times n \text{ матрицы} \\ [X,Y]=0 \\ + \text{усл. стабильности} \end{array} \right\} \Big/ \sim$

Условие стабильности: X^aY^bv порождает $\mathbb{C}^n$

$$(X,Y,v)\sim(gXg^{-1},\, gYg^{-1},\, gv) \qquad g\in GL(n).$$

Лемма Определения 1 и 2 эквивалентны

Д-во: 1⇒2: $\mathbb{C}^n = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{I}$, X = умн. на x
Y = умн. на y
$v = 1$

2⇒1: $I=\{f\in\mathbb{C}[x,y] : f(X,Y)v=0\}$

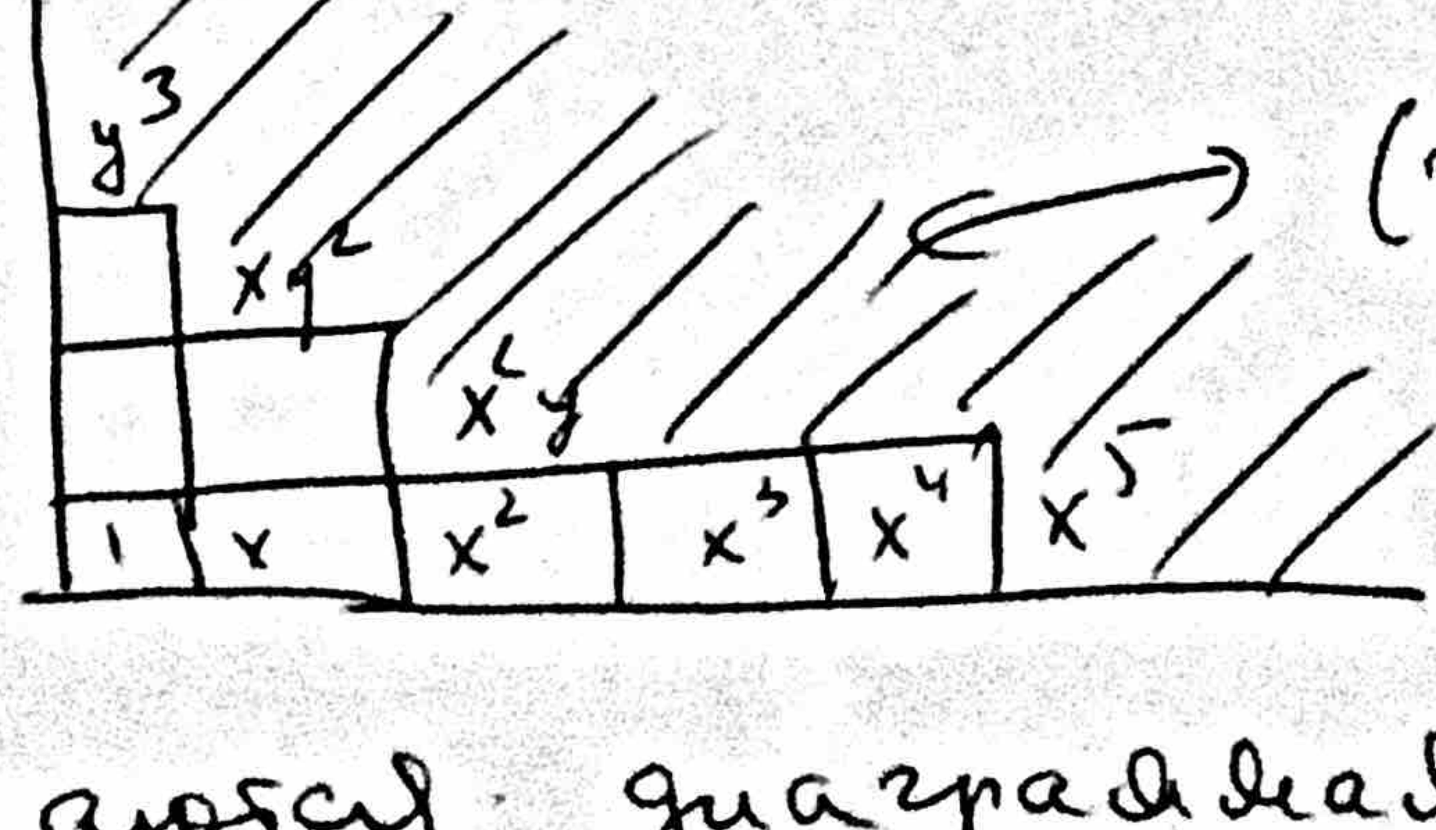
корректно определено т.к. $[X,Y]=0$.

Теор (Фогарти) $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$ = гладкое алгебраическое многообразие, $\dim = 2n$.

Действие $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^2$ продолжается на $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$.

$$(X,Y,v)\longrightarrow(qX,\, tY,\, v).$$

Неподвижные точки: мономиальные идеалы



$\longrightarrow (y^3, xy^2, x^2y, x^5)$

Задаются диаграммами Юнга λ
$|\lambda| = n$.

Опр 3 Параболическая схема Гильберта

$$PFH^{n,n+k} = \left\{ I_n \supset I_{n+1} \supset \dots \supset I_{n+k} \;\middle|\; \begin{array}{l} I_m \text{ — идеал в } \mathbb{C}[x,y] \\ \dim \frac{\mathbb{C}[x,y]}{I_m} = m \end{array} \right\}$$

$$\boxed{y I_n \subset I_{n+k}}$$

это очень важное условие!

Опр 4 $PFH^{n,n+k} = \{(X,Y,v) \mid [X,Y]=0\}/\sim$ усл. стаб.

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad}^{k} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & \begin{smallmatrix} * & \ddots & 0 \\ * & * & * \end{smallmatrix} \end{array}\right) \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad}^{k} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Упр Определения 3 и 4 эквивалентны.

Пример $PFH^{n,n} = Hilb^n \mathbb{C}^2$

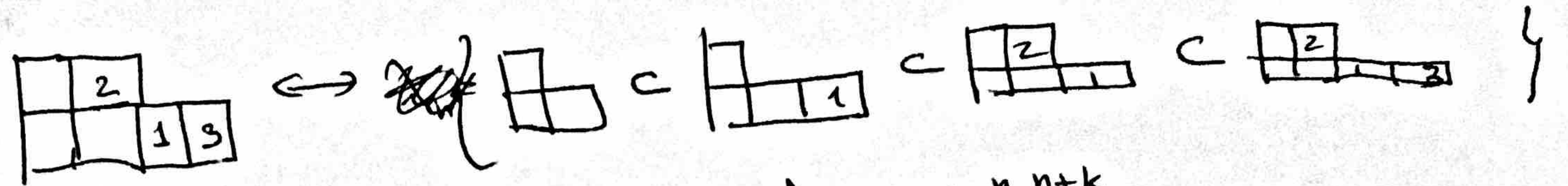
$PFH^{0,k} = \mathbb{C}^k$ (докажите!)

Можно построить действие $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ на $PFH^{n,n+k}$.

Неподвижные точки = флаги мономиальных идеалов т.ч. $y I_n \subset I_{n+k}$

$= \{\lambda_n \subset \lambda_{n+1} \subset \dots \subset \lambda_{n+k}\}$

т.ч. λ_{n+k}/λ_n = "горизонтальная полоска" (возможно, несвязная) т.е. нет двух клеток $\begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}$.



<u>Теорема</u> (Г., Карлсон, Меллит) $PFH^{n,n+k}$ гладкое для всех $n, n+k$, $\dim = 2n+k$.

<u>Д-во</u>: Рассмотрим отображение $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$
$(x,y) \to (x, y^{k+1})$

$J := \varphi^* I_{n+k} \oplus y \varphi^* I_{n+k-1} \oplus \dots \oplus y^k \varphi^* I_n$

Тогда $I_{n+k} \subset I_{n+k-1} \to y\varphi^* I_{n+k} \subset y\varphi^* I_{n+k-1}$

$y \cdot I_n \subset I_{n+k} \Rightarrow y^{k+1}\varphi^* I_n \subset \varphi^* I_{n+k}$

т.е. $yJ \subset J$. Ясно, что $xJ \subset J$, т.е.
J = идеал в $\mathbb{C}[x,y]$ коразмерности
$n + \dots + (n+k) = N$

Более того, рассмотрим действие $\mathbb{Z}_{k+1}$ на $\mathbb{C}^2$
$(x,y) \to (x, \zeta y)$, где $\zeta^{k+1} = 1$.

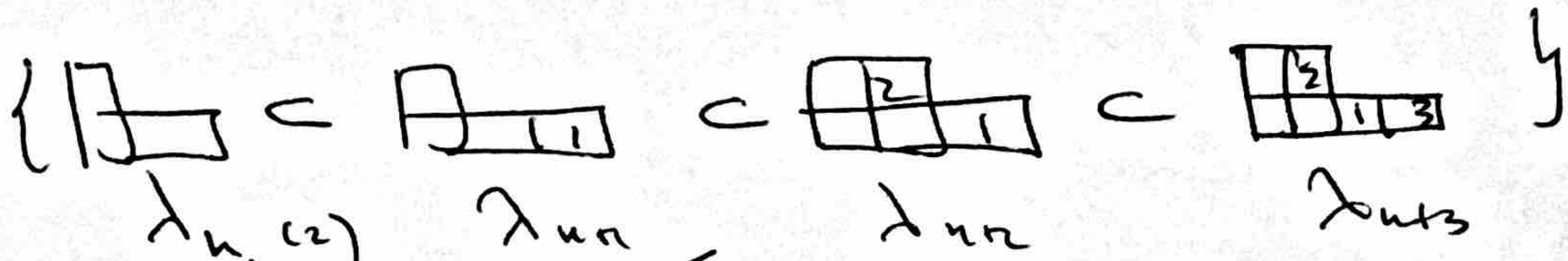
Тогда $\varphi^* I$ инвариантно относительно ζ
и, следовательно, J инвариантно относительно ζ.

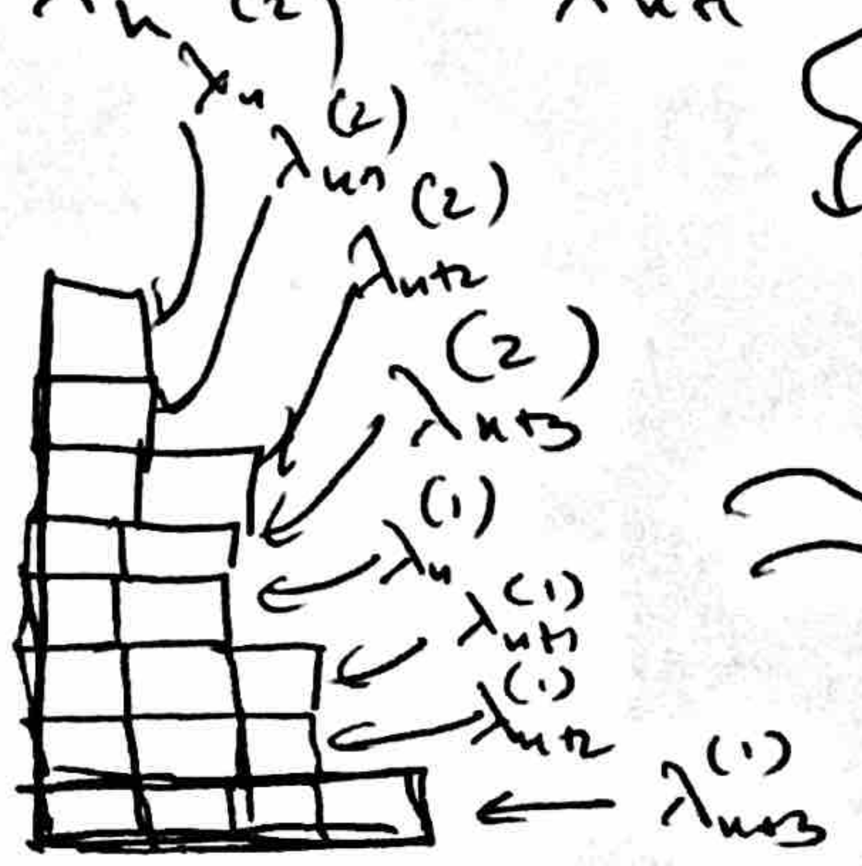
Можно проверить, что все идеалы в $(\mathrm{Hilb}^N \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}_{k+1}}$
получаются такой конструкцией.

Поэтому $PFH^{n,n+k} \simeq$ компонента связности
в $(\mathrm{Hilb}^N \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}_{k+1}}$.

Так как $\mathrm{Hilb}^N \mathbb{C}^2$ гладкое, то гладкое
и $PFH^{n,n+k}$ тоже. □

Заметим, что конструкцию J легко видеть в неп. точках.





$\rightsquigarrow \mu(J)$

$J(J)$ = диаграмма Юнга

$\Updownarrow$

$\lambda_{n+3} \setminus \lambda_n$ = "гориз. полоска".

<u>Упражнение</u> Зная характер касательного пространства в μ к $\mathrm{Hilb}^N \mathbb{C}^2$, описать характер касательного пространства к $PFH^{n,n+k}$.

<u>Лемма</u> $V_k \simeq \bigoplus_{n\geq 0} K_{\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(PFH^{n,n+k})$.

<u>Д-во</u>: Базис в $V_k = S_\lambda y_1^{a_1}\cdots y_k^{a_k}$

$$(\lambda, a_1\ldots a_k) \longrightarrow \mathrm{sort}(\lambda_1\ldots, a_1\ldots a_k)$$

= разбиение с k отмеченными частями.

$\Updownarrow$

$\mu_n \subset \ldots \subset \mu_{n+k}$

т.ч. $\mu_{n+k}\setminus\mu_n$ = "гориз. полоски"

<u>Геометрические операторы</u>

$$PFH^{n,n+k}_{(m)} = \{I_n \subset I_{n+1} \subset \ldots \hat{I}_{n+m} \subset \ldots \subset I_{n+k}\}$$

$yI_n \subset I_{n+k}$.

Тоже гладкое, $\pi_m : PFH^{n,n+k} \longrightarrow PFH^{n,n+k}_m$

Тогда: $T_m = \pi_m^* \pi_{mk} - q$

z_m = лин. расслоение I_{m}/I_{m+1}

<u>Ув</u> T_m, z_m порождают аффинную алгебру Гекке.

Комбинаторно: $\lambda_n \subset \dots \subset \lambda_{n+k}$

т.ч. $\lambda_{n+k} \setminus \lambda_n$ = "гориз. полоска"

- z_m умножает на q,t-содержание клетки с номером $n-m$
- T_m переставляет клетки с номерами m, $m+1$ с коэффициентами

$$
\begin{tikzcd}
 & PFH^{n,n+k} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
PFH^{n,n+k-1} & & PFH^{n+1,n+k}
\end{tikzcd}
$$

f забывает последний цикл (I_{n+k}), g забывает первый (I_n)

$$d_- = g_*, \quad d_+ = q^k(q-1) f^*$$

<u>Теор</u> (Г., Карлссон, Меллит)

d_+, d_-, T_i, z_i удовлетворяют соотношениям $\mathbb{B}_{q,t}$

В частности, можно определить действие y_i через $[d_+, d_-]$ и T_i.