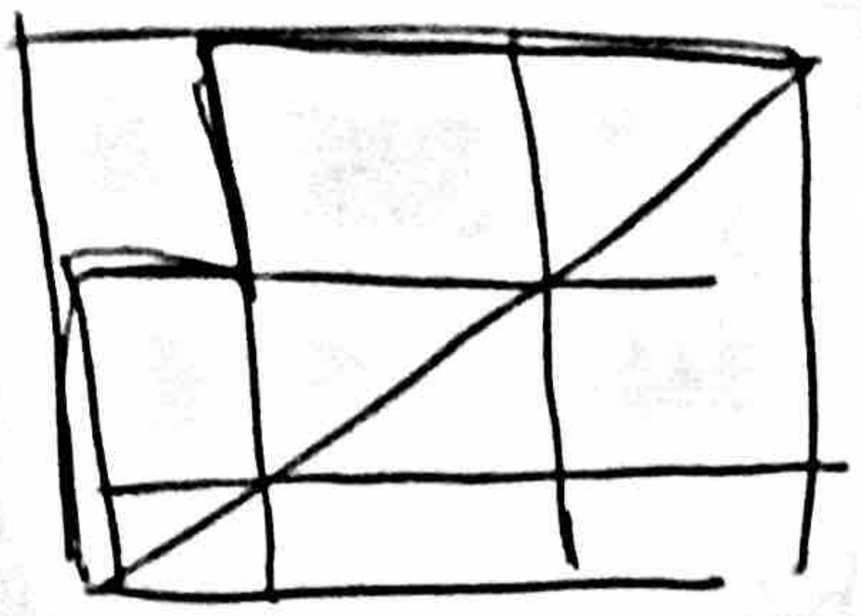
Лекция 3: Комбинаторика

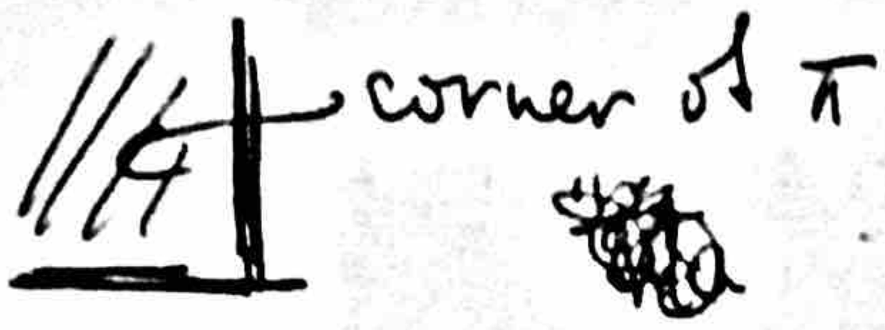


π = путь Дика в квадрате $n \times n$

$Area(\pi)$ = множество (целых клеток) между π и диагональю

$w \in \mathbb{Z}^n_{>0}$

<u>Опр</u> $Inv(\pi, w) = \#\{(i,j) \in Area(\pi) \mid w_i > w_j\}$



$C(\pi)$ = множество углов в π

<u>Опр</u> Для $wt : C(\pi) \longrightarrow \mathbb{Z}$ определим

$$\chi(\pi, wt) = \sum_{w \in \mathbb{Z}^n_{>0}} q^{inv(\pi, w)} \Big(\prod_{\substack{(i,j) \in C(\pi) \\ w_i \le w_j}} wt(i,j) \Big) x_w$$

<u>Пример</u> $\chi(\pi, 1) = \sum_{w \in \mathbb{Z}^n_{>0}} q^{inv(\pi, w)} x_w$

$$\chi(\pi, 0) = \sum_{\substack{w \in \mathbb{Z}^n_{>0} \\ w_i > w_j \\ \text{для } (i,j) \in C(\pi)}} q^{inv(\pi, w)} x_w$$

<u>Лемма</u> (а) $\chi(\pi, 1)$ симметрична по x

(б) $\chi(\pi, wt)$ симметрична по x для любой весовой функции wt

<u>Д-во</u> (а) Явная проверка, опускаем

Покажем, как получить (б) из (а).

(б) Пусть $\underset{C(\pi)}{\overset{\cap}{(i,j)}}$ = один из углов π

wt_1 = заменили $wt(i,j)$ на 1

π' = вывернули угол (i,j)

wt_2 = весовая функция на π', $=1$ на ~~…~~ новом углах и wt на остальных. Тогда

$$(*)\quad \chi(\pi, wt) = \frac{q^{wt(i,j)}-1}{q-1}\chi(\pi, wt_1) + \frac{1-wt(i,j)}{q-1}\chi(\pi', wt_2)$$

Используя $(*)$, можно по индукции свести к $\chi(\pi,1)$.

<u>Следствие</u>. $\chi(\pi,0) = (1-q)^{-|c(\pi)|}\sum\limits_{S\subset C(\pi)} (-1)^{|S|}\chi(\pi_S,1)$

где π_S = путь, полученный из π выворачиванием углов из S.

<u>Теорема</u> (а) Пусть π = путь Дика, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2n}$ — посл-ть ± 1

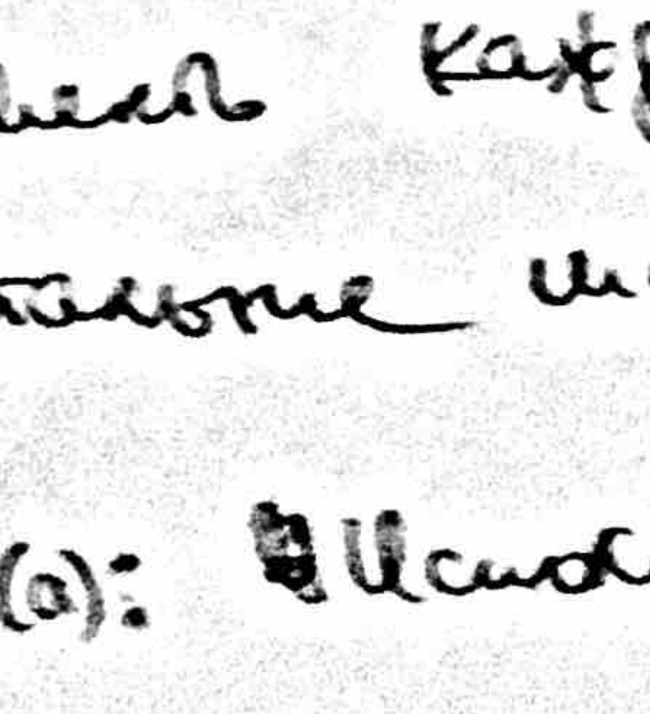
$+1$ = шаг направо, -1 = шаг вверх, соотв. π

Тогда $\chi(\pi,1) = d_{\varepsilon_1}\dots d_{\varepsilon_{2n}}(1)$ (где $d_\varepsilon = d_+$ или d_- в алгебре A_q)

(б) Чтобы получить $\chi(\pi,0)$, нужно заменить каждый угол на $\frac{1}{q-1}[d_-,d_+]$, а остальные шаги — на d_+ или d_-, соответственно.

<u>Д-во</u> (а): Используем <u>частичные пути Дика</u>

$D_{k,n}$ = пути из $(0,k)$ в (n,n) выше диагонали


k

Для таких частичных путей определяется $\chi_k : D_{k,n} \to V_k$ и доказывается

$\chi_{k+1}(E\pi) = d_+\chi_k(\pi)$

$\chi_{k-1}(N\pi) = d_-\chi_k(\pi)$

(б) Следует из (а) и сказанного выше.

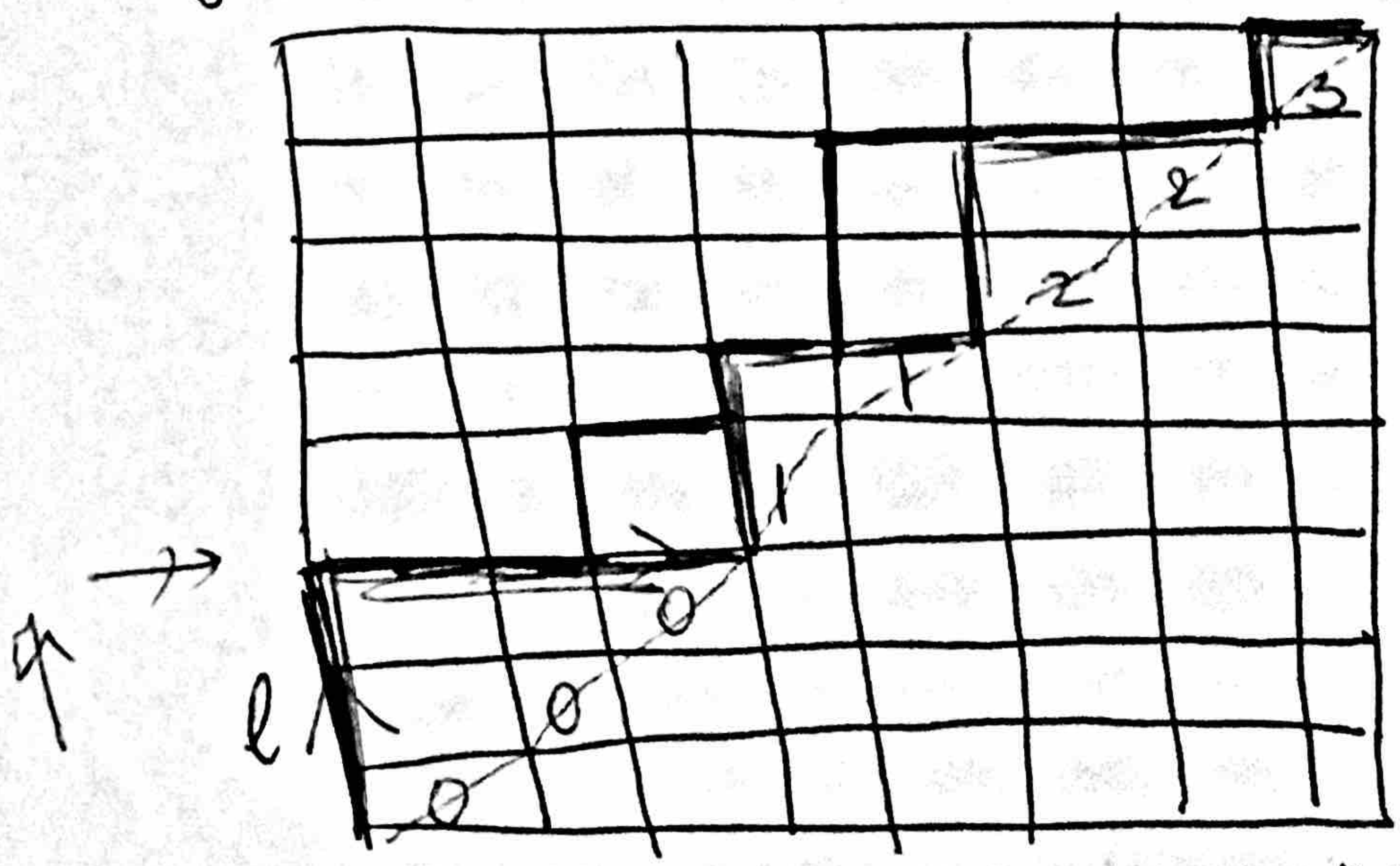
Перейдём к доказательству Шаффл-гипотезы.

~~Определим~~ Для цепочки $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_l)$ определим

$N_\alpha \in V_l$ по следующим правилам:

$$\boxed{N_\varnothing = 1, \quad N_{1\alpha} = d_+ N_\alpha, \quad N_{a\alpha} = \frac{t^{a-1}}{q-1}[d_-, d_+] \sum_{\beta \models a-1} d_-^{l(\beta)-1} N_{\alpha\beta}}$$

Определим bounce(π) следующим образом: запустим шарик из $(0,0)$ наверх, он будет отражаться в пути Дика π и в диагонали



bounce $= 0+0+0+1+1+2+2+3 = 9$

(= сумма расстояний от точек отскока на диагонали до (n,n))

Пусть l = высота первого отрезка (вверх) из $(0,0)$. Определим $\tilde{\pi}$ т.ч. $\pi = N^l \tilde{\pi}$.

(где $\tilde{\pi}$ начинается с E)

Для $0 \le i \le l$ определим

$$t_i = \text{bounce}(\underbrace{N^{i+1} E N^{l-i} \tilde{\pi}}_{\text{путь в } n+1 \times n+1})$$

~~Опр~~ Наконец, определим

$$touch'(\pi) = (t_0 - t_1, t_1 - t_2, \ldots, t_{l-1} - t_l)$$

Заметим, что $t_0 = bounce(NEN^l\tilde{\pi}) = bounce(NE\pi)$

$$= bounce(\pi) + n$$

и $t_l = bounce(N^{l+1}E\tilde{\pi}) = bounce(\pi)$,

поэтому $\boxed{t_0 - t_l = n}$.

<u>Опр</u> Определим $D_\alpha(q,t) = \sum_{touch'(\pi)=\alpha} t^{bounce(\pi)} \chi(\pi, 0)$

$\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_l)$

<u>Теор</u> $D_\alpha(q,t) = d_-^l(N_\alpha)$.

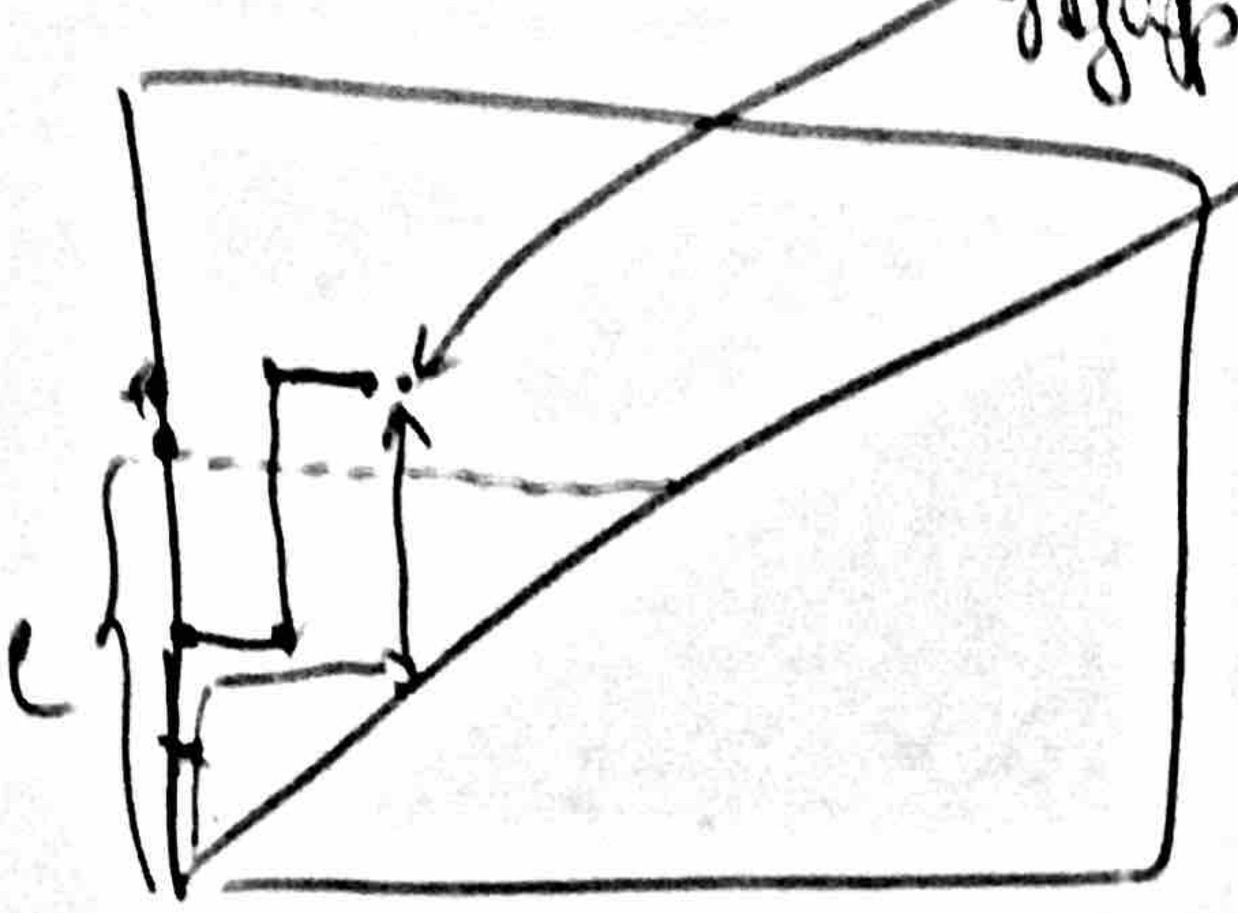
<u>Д-во:</u> По пред. теореме нам можно выразить $\chi(\pi,0)$ как ~~произведение~~ композицию d_+, d_- и $\frac{[d_-, d_+]}{q-1}$ в углах, т.к. каждая такая композиция начинается с d_-^l, достаточно проверить, что

$$\sum_{\substack{N^l\tilde{\pi} = \pi \\ touch(\pi) = \alpha}} t^{bounce(\pi)} \chi_l(\tilde{\pi}) = N_\alpha.$$

Нужно проверить, что левая часть удовлетворяет правильной рекурсии.

- Если $\alpha_1 = 1$, то $t_0 - t_1 = 1$.

Заметим, что $t_1 = bounce(N^2EN^{l-1}\tilde{\pi})$



здесь $\Rightarrow \hat{\pi}$ начинается с EE

$\Rightarrow$ ~~...~~ $\chi_\ell(\hat{\pi})$ начинается с d_+

Более того, для $i>1$

~~получим~~ bounce уменьшается на 1.

Более общо, определим $\gamma_i(\pi) = N^{i+1} E N^{\ell-i}\hat{\pi}$

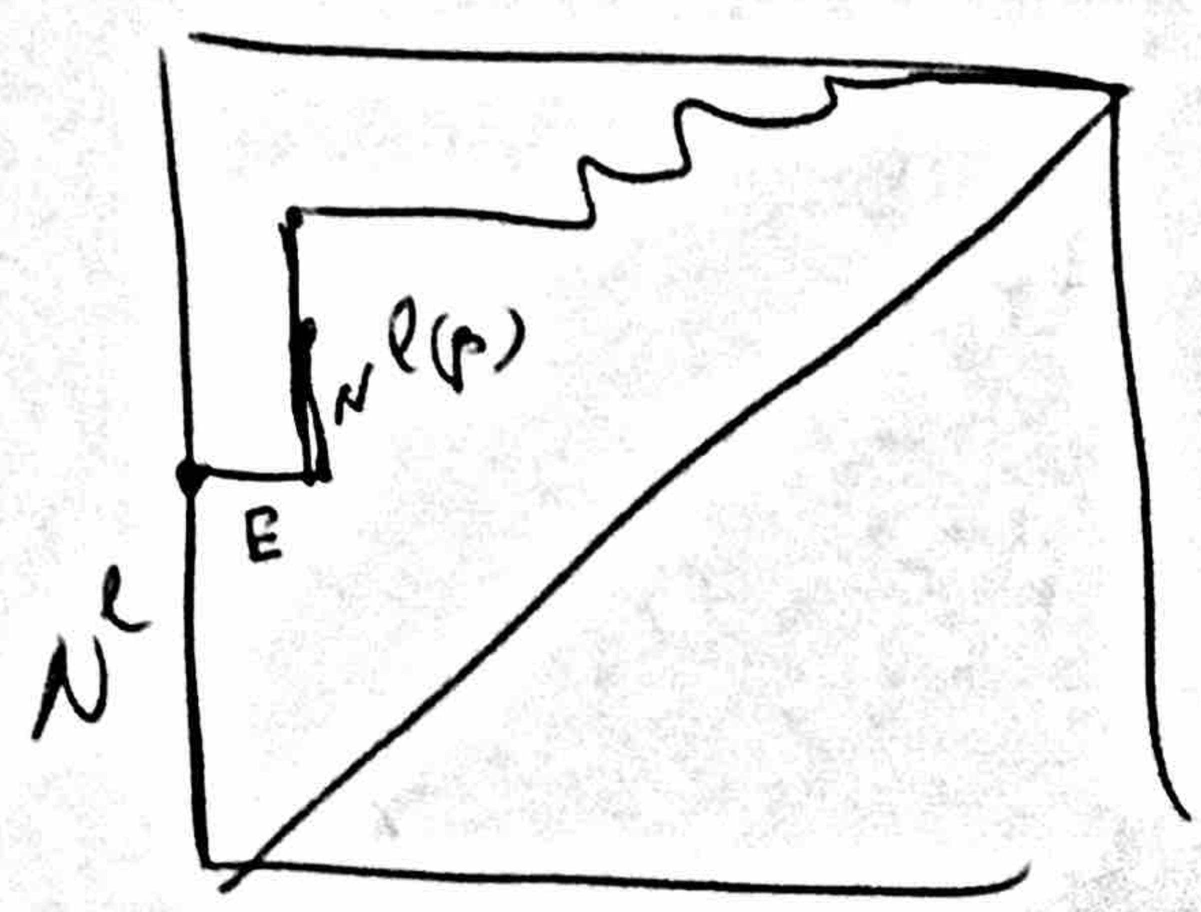
По определению, $\mathrm{bounce}(\gamma_i(\pi)) = t_i =$

$= t_\ell + \sum_{j>i} \alpha_j = \mathrm{bounce}(\pi) + \sum_{j>i}\alpha_j$

Кроме того, ~~...~~ можно проверить, что

$\mathrm{touch}(\gamma_i(\pi)) = (1+\sum_{j>i}\alpha_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_i)$

т.е.



<u>Лемма</u> $y_\alpha = y_1^{\alpha_1-1} \cdots y_k^{\alpha_k-1} \in V_k$

$$y_{1\alpha} = d_+^* y_\alpha, \quad y_{a\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{q-1}\left(d_+^* d_- - d_- d_+^*\right) \sum_{\beta\models\alpha-1} q^{1-\ell(\beta)} d_-^{\ell(\beta)-1} y_{\alpha\beta}$$

<u>Д-во</u>: Прямое вычисление.

Напомним, что в алгебре $A_{q,t}$ была инволюция, которая заменяет d_+ на d_+^*.

Две предыдущие леммы показывают, что

$$\mathcal{N}(y_\alpha) = q^{\Sigma(\alpha_i - 1)} N_\alpha$$

т.к. они удовлетворяют одним и тем же рекурсиям.

Поэтому: $D_\alpha = d_-^l (N_\alpha) = q^{\cdots} d_-^l \mathcal{N}(y_\alpha) =$

$$= q^{\cdots} \mathcal{N}(d_-^l y_\alpha).$$

Теперь $d_-^l (y_\alpha) = B_\alpha$, осталось понять, как $\mathcal{N}$ действует на V_0.

Теор. На V_0 $\mathcal{N} = \nabla \omega$, где $\overline{\omega}$ меняет q, t, X на q^{-1}, t^{-1} и $-X$.

Д-во Определим $D_1 = -d_- d_+^*$, $D_1^* = \omega D_1 \omega$

$$\underset{P_{1,1}}{\parallel} \qquad \underset{P_{1,-1}}{\parallel}$$

$e_1 = d_- d_+$

(оператор умножения на e_1).

Получаем $\mathcal{N} D_1 = -e_1 \mathcal{N}$

$\mathcal{N} e_1 = -D_1 \mathcal{N}$ и это полностью определяет ∇ т.к.

С другой стороны, $\nabla e_1 = D_1 \nabla$ $e_1 D_1^*$ порождают V_0

$\nabla D_1^* = -e_1 \nabla$

NB: $d_+^* F = \gamma F[X + (q-1) y_{k+1}]$, где

$\gamma y_i = y_i \quad \gamma y_{k+1} = t y_1$

Если $F \in V_0$, то $d_+^* F = F[X + (q-1) t y] \in V_1$

$-d_- d_+ F = F[X + (q-1) t y - (q-1) y]\, \mathrm{Exp}[-y^{-1} X]\big|_{y^{-1}} =$

$= F[X + (q-1)(t-1) y]\, \mathrm{Exp}[-y^{-1} X]\big|_{y^{-1}}$

$=$ вершинный оператор для $P_{1,k}$.

Заключение: $\sum_{\pi} t^{\mathrm{bounce}(\pi)} \chi(\pi, 0) = \sum_{\alpha} D_\alpha =$

$= \sum_{\alpha} N(\ddot{q}\, d_-^{l}\, y_\alpha) = N\bar{\omega}\left(\sum_\alpha C_\alpha\right)$

$\boxed{d_-^{l}(y_\alpha) = (-1)^l B_\alpha}$ $= N\bar{\omega}(e_n)$

$\boxed{\bar{\omega} B_\alpha = \ddot{q}(-1)^l C_\alpha}$ $= \nabla e_n.$ ∎