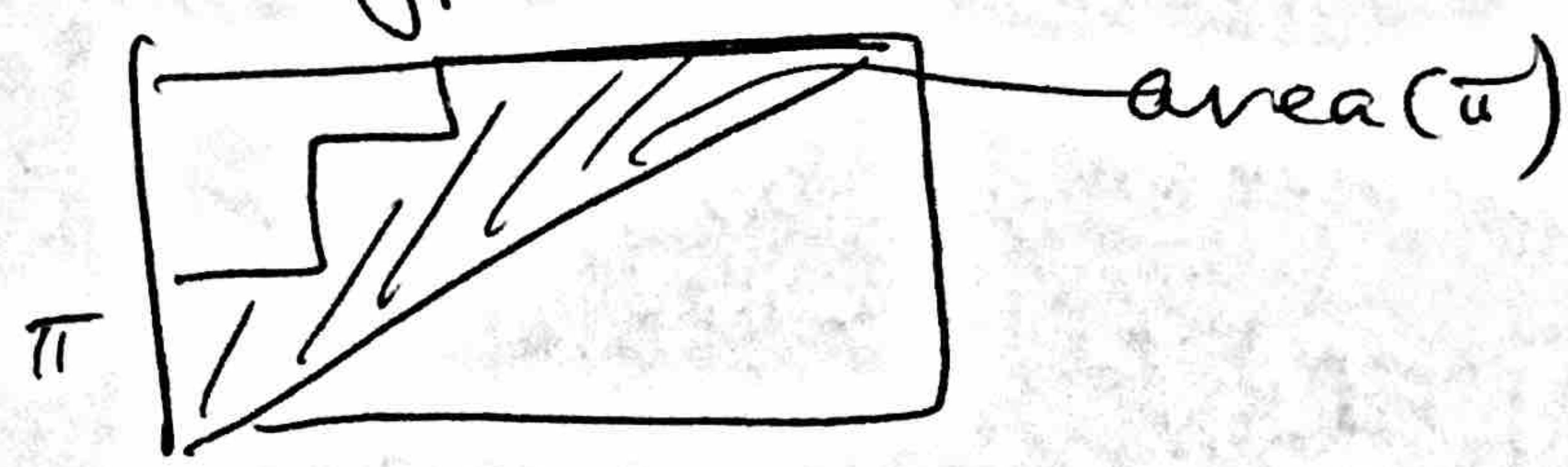
Алгебра Карлссона - Меллита

① **Мотивация**: shuffle conjecture (= thm) (Haiman, Haglund, Loehr, Remmel, Ulyanov).

$$\nabla e_n = \sum_{\pi \in D_n} t^{area(\pi)} \chi(\pi, q) \qquad (**)$$

где: • D_n = множество путей Дика π в квадрате $n \times n$



• $\chi(\pi, q)$ = симметрическая функция степени n от переменных $X = x_1, \ldots$; зависящая от параметра q

• e_n = элементарная симметрическая функция от X

• ∇ = оператор Бержерона - Гарсиа

$$\nabla \tilde{H}_\lambda = \Big(\prod_{\square \in \lambda} \square\Big) \tilde{H}_\lambda,$$ где $\square = q \cdot t$ содержание $\square \in \lambda$

а $\tilde{H}_\lambda$ = модифицированный многочлен Макдональда.

t^2				
t	qt			
1	q	q^2	q^3	q^4

$$\prod_{\square \in \lambda} \square = 1 \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdot t \cdot qt \cdot t^2 = q^{11} t^4.$$

Замечание: (1) Левая часть (**) — симметрический многочлен по X, к-ты — а приори рац. ф-ции от q, t. Можно доказать, что к-ты = многочлены от q, t с целыми коэффициентами. Сложно: $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q,t]$.

(2) Правая часть (**) — симм. многочлен по X, к-ты $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q,t]$ (это следует из рез-тов LLT). Сложно: симметрия по q,t.

Почему это важно?

Thm (Haiman) Определим

$$DR_n = \frac{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]}{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]^{S_n}_+}$$

Тогда $\dim DR_n = (n+1)^{n-1}$, бигадуирована (степень по x и по y), представление S_n. Бигадуированный характер Фробениуса $= \nabla e_n$.

Открытый вопрос: построить базис в DR_n, соответствующий правой части (**).

Идея: (1) $DR_n = H^0(Z_n, P \otimes \mathcal{O}(1))$, где Z_n = схема Гильберта n точек на $\mathbb{C}^2$ сосред. в нуле, а P = расслоение Прочези (Haiman, больше деталей в докладе).

(2) Правая часть (***) связана с когомологиями аффинных слоёв Шпрингера (Хикита, Г.-Мазин-Вазира, Карлссон, Обломков-Юн).

Стратегия д-ва: доказать тождество для симметрических многочленов, используя рекурсию и операторы на несимм. многочленах от дополнительных переменных.

Опр. $\Lambda(q,t)$ = симм. мн-ны от ∞ числа переменных

- $V_k := \Lambda(q,t)[y_1 \ldots y_k]$, $V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k$.
- Операторы: $y_1, \ldots, y_k : V_k \to V_k$ (умножение)

$T_1 \ldots T_{k-1} : V_k \to V_k$

$$T_i(f) = \frac{(q-1)y_i f + (y_{i+1} - q y_i) f(y_i \leftrightarrow y_{i+1})}{y_{i+1} - y_i}.$$

оператор Демазюра-Люстига

Если f симм. по y_i, y_{i+1}, то $T_i(f) = f$.

Кроме того,

$$(T_i - 1)(T_i + q) = 0 \qquad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$

$$T_i T_j = T_j T_i \quad (|i-j| \geq 2)$$

$$y_i y_j = y_j y_i, \quad T_i y_j = y_j T_i \quad j \neq i, i+1$$

$$T_i y_{i+1} T_i = q y_i$$

[T_i, y_j образуют аффинную алгебру Гекке]

$$d_+ : V_k \to V_{k+1}, \quad d_- : V_k \to V_{k-1}$$

$$(d_+F)[X] = T_1 \dots T_k\, F[X + (q-1)y_{k+1}].$$

"плетизм" $p_m(x) \longrightarrow p_m(x) + (q^m - 1)\, y_{k+1}^m$

$$(d_-F)[X] = -F[X - (q-1)y_k]\, \mathrm{Exp}[-y_k^{-1} X]\Big|_{y_k^{-1}}$$

где $\mathrm{Exp}[X] = \sum h_n[X]$.

<u>Соотношения</u>: $T_i d_- = d_- T_i$, $d_+ T_i = T_{i+1} d_+$

$$T_1 d_+^2 = d_+^2 \qquad d_-^2 T_{k-1} = d_-^2$$

$$d_-(d_+d_- - d_-d_+)T_{k-1} = q(d_+d_- - d_-d_+)d_-$$

$$T_1(d_+d_- - d_-d_+)d_+ = q\, d_+(d_+d_- - d_-d_+).$$

<u>Пример</u> (1) $d_+ T_i(F) = T_1 \dots T_k (T_i F)[X + (q-1)y_{k+1}]$

$$= T_1 \dots T_k T_i F[X + (q-1)y_{k+1}] =$$

$$= \underbrace{T_1 \dots T_i T_{i+1} T_i}\, \underbrace{T_{i+2} \dots T_k}\, [X + (q-1)y_{k+1}]$$

$$= \underbrace{T_1 \dots} T_{i+1} \underbrace{T_i T_{i+1} T_{i+2} \dots T_k} (X + (q-1)y_{k+1}]$$

$$= T_{i+1}\, d_+(F).$$

<u>Лемма</u> $(d_-d_+ - d_+d_-)F = (q-1)T_1 \dots T_{k-1}(-y_k)F.$ (***)

для $F \in V_k$

Д-во Предположим, что F не зависит от X (иначе аналогично),

тогда $d_+ F = T_1 \dots T_k F$. Имеем:

$$(d_- d_+ - d_+ d_-) F =$$

$$= d_- T_1 \dots T_k F - T_1 \dots T_k (d_- F)[X + (q-1) y_k]$$

$$= T_1 \dots T_{k-1} \left(d_- T_k F - (d_- F)[X + (q-1) y_k] \right)$$

Надо проверить:

(****) $d_- T_k F - d_- F [X + (q-1) y_k] = (1-q) y_k F$

Не зависит от $y_1 \dots y_{k-1}$, т.е. можно считать $F = y_k^j$. Проверяем:

$$T_k(y_k^j) = \frac{(q-1) y_k \cdot y_k^j + (y_{k+1} - q y_k) y_{k+1}^j}{y_{k+1} - y_k} =$$

$$= y_{k+1}^j + (1-q) \sum_{i=1}^{j} y_k^i y_{k+1}^{j-i}$$

$$\boxed{d_-(F) = -F \cdot \mathrm{Exp}(-y_k^{-1} X) \Big|_{y_k^{+1}}}$$ (если F не зав. от X).

(****) $d_- T_k (y_{k+1}^j) = \left(y_{k+1}^j + (1-q) \sum_{i=1}^{j} y_k^i y_{k+1}^{j-i} \right) \cdot \mathrm{Exp}(-y_k \dots$

$$= -h_{j+1}[-X] - (1-q) \sum_{i=1}^{j} y_k^i h_{j-i+1}[-X]$$

тогда как

$$d_- F = - y_k^j \cdot \mathrm{Exp}(-y_k^{-1} X) \Big|_{y_k^{-1}} = -h_{j+1}[X].$$

Итого: $-h_{i n}[-X]-(1-q)\sum_{i=1}^{j} y_k^{i}\, h_{j-i+1}[-X]+h_{j+1}[-X-(q-1)y_k]$

$$=(1-q)\,y_k^{j+1}.\ \blacksquare.$$

Все остальные соотношения на $(d_-d_+-d_+d_-)\ldots$ следуют из данных.

Следствие y_k можно выразить через T_i, d_+, d_- (т.к. T_i обратимы).

Ещё соотн. $y_i d_- = d_- y_i$

$$d_+ y_i = T_1\ldots T_i\, y_i\, (T_1\ldots T_i)^{-1} d_+$$

Лемма $d_-^{M} y_1^{a_1}\cdots y_{k+m}^{a_{k+m}}\, d_+^{k+m}(e_0)$

~~~~ где $a_{k_n}\geq\ldots\geq a_{k+m}$

образуют базис в V. (и в $A_q(e_0)$).

Д-во Исп. соотношен, упрощая.

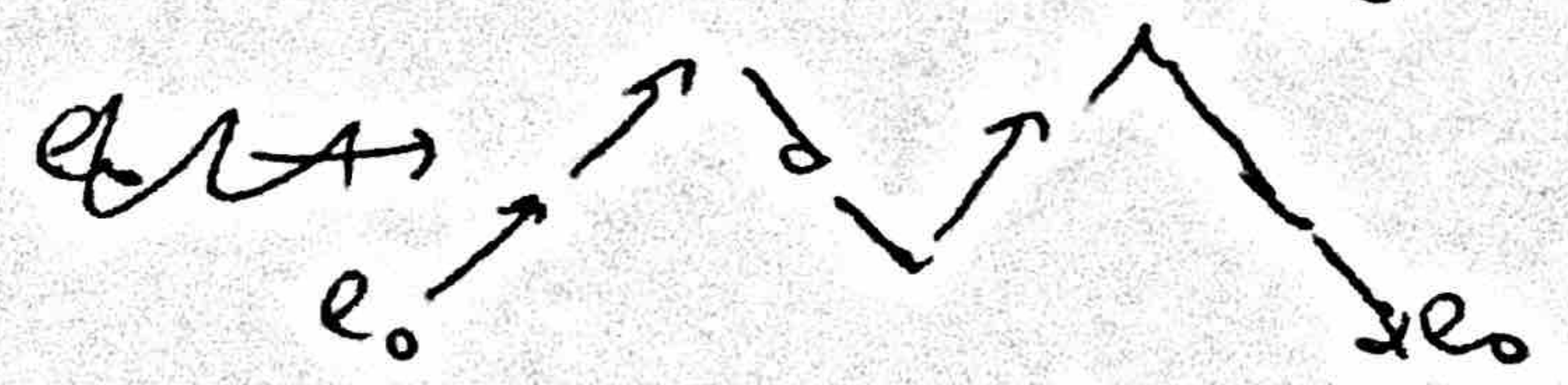
Приложение: можно строить интересные элементы в V_0 / операторы $V_0\to V_0$.

(а) $d_-^{k}(y_1^{a_1}\ldots y_k^{a_k})\,d_+^{k}(e_0)=B_\alpha$

(б) $d_{\pm}^{\varepsilon_1} d_{\pm}^{\varepsilon_2}\ldots d_{\pm}(e_0)$

$\varepsilon_i=\pm1$ ~~....~~, число $(+1)$ = число (-1)

в любом отрезке $\#(+1)\geq$ числ (-1)



путь Дика!
~~~~

~~Теор~~ Операторы $T_i^* = T_i^{-1}$, $d_-^* = d_-$

$$d_+^* F[X] = \gamma F[X + (q^{-1}) y_{k+1}]$$

где $\gamma : y_i \to y_{i+1}$, $y_{k+1} \to t y_1$.

Задают действие $\mathbb{A}_{q^{-1}}^*$ на V.

Следствие ~~Есл~~ Можно определить коммутирующ. операторы $z_i : V_k \to V_k$

Опр $\mathbb{A}_{q,t}$ = алгебра, порожденная $\mathbb{A}_q$ и $\mathbb{A}_{q^{-1}}$ с соотношениями

$$z_{i+1} d_+ = d_+ z_i, \quad y_{i+1} d_+^* = d_+^* y_i,$$

$$\boxed{z_1 d_+ = -y_1 d_+^* t q^{k+1}.}$$

единств. соотнош. с t.

Теор $\mathbb{A}_{q,t}$ допускает q,t-антилинейный автоморфизм, переставляющий $\mathbb{A}_q$ и $\mathbb{A}_{q^{-1}}$

Теор Это согласовано с ~~инволюцией~~ инволюцией на V:

$$N : V \longrightarrow V, \quad N(1) = 1, \quad N T_i = T_i^{-1} N$$

$$N d_- = d_- N, \quad N d_+ = d_+^* N, \quad N y_i = z_i N$$

- $N^2 = id$ $\quad$ • ~~$N(y_i) = z_i$~~
- Он V_0, $N = \nabla \bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ заменяет q, t, X на $q^{-1}, t^{-1}, -X$.