Семинар 1-2

Пусть $O(x)$, $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3$ – подвижный ортонормированный репер с началом в точке O в ориентированном аффинном, евклидовом пространстве E^3. Тогда можно написать (почему?)

$d(O) = \sum\limits_{i=1}^{3} \omega_i e_i$

$d(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{3} \omega_{ij} e_j$, $1 \leq i \leq 3$,

где ω_i, ω_{ij} – дифференциальные 1-формы в E^3 (точнее, в области существования подвижного репера). Эти формы типа определяют бесконечно малый сдвиг репера при его движении.

1. Доказать, что между введенными 1-формами имеются следующие дифференциальные соотношения

$d(\omega_j) = \sum\limits_{j=1}^{3} \omega_i \wedge \omega_{ij}$, $1 \leq i \leq 3$,

$d(\omega_{ij}) = \sum\limits_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, $1 \leq i, j \leq 3$,

$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, $\omega_{ii} = 0$.

2. Из курса анализа на многообразиях известно, что с каждой регулярной (что это такое?) кривой в E^3 связан подвижный репер Френе. Вспомните его конструкцию. Докажите, что уравнения его движения имеют вид

$de_1 = \omega_{12} e_2$, $de_2 = -\omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_2$, $de_3 = -\omega_{23} e_2$.

Выберем длину дуги s в качестве параметра на нашей кривой. Тогда $\omega_{12} = \rho^{-1} ds$, $\omega_{23} = \tau^{-1} ds$, где ρ^{-1} называется кривизной, а τ^{-1} – кручением кривой.

3. Вычислите кривизну и кручение кривой $x_1 = r\cos t$, $x_2 = r\sin t$, $x_3 = 2t$.

4. Пусть в E^3 задана гладкая поверхность S, ориентированная единичной нормалью N. На поверхности S рассмотрим регулярную кривую C, ориентированную единичным вектором скорости. Постройте естественный подвижный репер Дарбу, связанный с такой парой $C \subset S$. Если в качестве параметра на кривой выбрать длину дуги s, то $\omega_{12} = a ds$, $\omega_{13} = b ds$, $\omega_{23} = c ds$.

Функции a, b, c были названы геодезической кривизной, нормальной кривизной, геодезическим кручением соответственно. Заметим ,что репер Дарбу e_1, e_2, e_3 и репер Френе $e_1, \tilde{e_2}, \tilde{e_3}$ отличаются поворотом на угол θ в плоскости, перпендикулярной вектору e_1. Докажите, что геодезическая кривизна равна (по абсолютной величине) $\sin\theta/\rho$, а нормальная кривизна равна $\cos\theta/\rho$ (теорема Менье).

5(труднее). Если две кривые на поверхности S касаются в точке $O \in S$, то их нормальные кривизны и геодезические кручения в этой точке совпадают. Доказать.

6. Если две кривые на поверхности проходят через одну и ту же точку, имеют в этой точке одну и ту же касательную и одну и ту же соприкасающуюся плоскость (что это такое?), то они имеют одинаковый радиус кривизны в этой точке. Доказать.

7. Если плоскость P вращается вокруг прямой l, которая касается поверхности S в точке O, то центры кривизны (что это такое?) кривых $P \cap S$ в точке O описывают окружность, проходящую через точку O. Доказать.

8. Геодезическая на поверхности – это кривая с нулевой геодезической кривизной. Попробуйте, используя это определение, найти геодизические на сфере ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$.