Лекция 1-19. Царский путь в пространство L_2.

1 Традиционное определение пространства L_2.

(на $\Omega = [a, b]$ или на $\Omega = \mathbb{R}$)

Определение 1 *L_2 - это пространство измеримых функций на Ω, суммируемых (интегрируемых) с квадратом: $\int_\Omega \int^2(x)dx < \infty$.*

Ступени к этому определению:

- мера Лебега
- измеримые функции
- интеграл Лебега

Точнее, элемент пространства L_2 - это класс эквивалентности функций: две функции зквивалентны, если они совпадают почти всюду.

2 “Царский путь” по Арнольду: короткое определение L_2.

Определение 2 *Вещественное пространство $L_2(\Omega)$ - это пополнение пространства $C_2^0\Omega$ - вещественные непрерывные функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактным носителем с нормой:*

$$||f||^2 = \int_\Omega f^2(x)dx \tag{1}$$

Замечание 1 *Функция f непрерывна, поэтому* (1) *- интеграл Римана.*

Определение 3 *Комплексное пространство L_2 - то же, что и выше, только функции комплекснозначные, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, и $||f||^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx$.*

Теорема 1 *(о пополнении) Любое метрическое пространство X с метрикой ρ может быть пополнено: существует пространство $\tilde{X} \supset X$ с метрикой $\tilde{\rho}$ такое, что*
$\tilde{X}$ полно
X плотно в $\tilde{X}$
$\tilde{\rho}|_{x \times x} = \rho$

Точки $\tilde{X}$ - классы эквивалентности последовательностей Коши в X. Две последовательности (f_n) и (g_n) эквивалентны, если $\rho(f_n, g_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

3 Эквивалентность двух определений L_2

Теорема 2 *Два определения пространства $L_2(\mathbb{R})$ - "традиционное" и "новое" эквивалентны.*

Доказательство (набросок)

Из традиционного определения следует новое. Полноту "традиционного" $L_2(\mathbb{R})$ мы уже доказали. Нужно доказать, что непрерывные функции плотны в $L_2(\mathbb{R})$. Это следует из теоремы Лузина.

Подробнее, возьмем произвольную функцию f из $L_2(\mathbb{R})$. Обрежем ее график по горизонтали и вертикали: рассмотрим функцию $g_N = f^N \chi_{[-N,N]}$. При достаточно большом N функции f, g_N близки в $L_2(\mathbb{R})$. Возьмем малое δ и непрерывную функцию φ, которая совпадает с g_N вне множества меры меньше δ. Заменяя функцию φ ее N-срезкой, можем считать, что $|\varphi| \leq N$. Тогда

$$||g_N||^2 - ||\varphi||^2 < \delta N^2,$$

что и требовалось.

Из нового определения следует традиционное. Действительно, "традиционое" $L_2(\mathbb{R})$ полно и непрерывные функции в нем плотны. В силу единственности пополнения, оно совпадает с "новым". $\square$

4 Евклидовы и гильбертовы пространства.

Евклидово скалярное произведение:

$E \times E \to \mathbb{R}$, $\{\xi, \eta\} \mapsto (\xi, \eta)$:

1^0 Билинейность

2^0 Симметричность

3^0 Положительность: $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$

Конечномерный случай - евклидов; бесконечномерный - гильбертов.

Теорема 3 *(упражнение) Все n-мерные евклидовы пространства изометричны.*

Следствие 1 *В L_2 действует привычная геометроическая интуиция: любое двумерное (трехмерное) пространство в L_2 изометрично $\mathbb{R}^2$ (соответственно, $\mathbb{R}^3$).*

5 Неравенство Коши-Буняковского.

В $L_2(\Omega, \mathbb{R})$

$$|\int_\Omega fgdx| \leq \sqrt{\int f^2 dx \int g^2 dx} \tag{2}$$

Почему верно (2)? Потому что

$$|\cos\varphi| \leq 1 \ \forall \ \varphi \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Объяснение 1 *Плоскость в* $L_2(\Omega, \mathbb{R})$*, натянутая на* f, g *со скалярным произведением* (2)*, изометрична плоскости* $\mathbb{R}^2$ *со скалярным произведением*

$$(u, v) = |u||v| \cos\angle(u, v).$$

значит, из (3) *следует* $|(u, v)| \leq |u||v|$*, откуда следует* (2).

6 Общий вид линейного функционала в конечномерном пространстве E ($\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$).

Пусть функционал $l : E \to R$ линеен над $\mathbb{R}, E$ - евклидово.

Теорема 4 $\exists \eta : l(\xi) = (\xi, \eta) \ \forall \ \xi \in E.$

Доказательство Рассмотрим гиперплоскость $\mathcal{L} = \{l = 0\}$. Возьмем

$$n \perp \mathcal{L}, \ (n, n) = 1; \ \eta = l(n) \cdot n.$$

Произвольный вектор x разлагается в сумму $\xi + \alpha n, \ \xi \in \mathcal{L}$. Тогда $l(\xi + \alpha n) = \alpha l(n)$. Но

$$(x, \eta) = (\xi + \alpha n, \ l(n)n) = \alpha l(n).$$

Следовательно, $l(x) = (x, \eta)$.

□