

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2019  
ЛИСТОК 1

срок сдачи 08.02.2018

1. Приведите пример функции  $f(z, \bar{z})$  для которой предел  $z \rightarrow 0$  вдоль любой прямой существует, все такие пределы равны, но  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z, \bar{z})$  не существует.

2. Покажите, что если  $f(z)$  дифференцируемая в окрестности точки  $z = a$  функция комплексного переменного, то функция  $\overline{f(\bar{z})}$  будет дифференцируемой в окрестности  $z = \bar{a}$  и найдите её производную в  $\bar{a}$ .

3.

а) Найдите уравнение окружности, проходящей через не лежащие на одной прямой точки  $z_1, z_2, z_3$ .

б) Докажите, что точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение  $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$  вещественно.

4. Докажите что дробно-линейные преобразования переводят обобщённые окружности в обобщённые окружности.

5. Покажите, что если для голоморфной в области  $D$  функции  $f$  при всех  $z \in D$  выполняется  $f(z) \in \mathbb{R}$  или  $|f(z)| = 1$ , то эта функция постоянна.

6. Найдите все голоморфные функции  $f(z, \bar{z})$  такие что

а)  $\operatorname{Im} f(z) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

б)  $\arg f(z) = xy \pmod{2\pi}$

7. Докажите, что если  $f$  голоморфная в области  $D$  функция, то  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$  гармонические в  $D$ . Что можно сказать о функциях  $|f|$  и  $\arg f$ ?

8. Найдите все гармонические функции  $F(x, y)$  вида  $F = \varphi(x^2 + y^2)$ ,  $F = \varphi(x^2 - y^2)$ ,  $F = \varphi(\frac{y}{x})$ .

9. Найдите голоморфные функции, с постоянными вдоль линий семейства  $\{x^2 + y^2 = Cx | C \in \mathbb{R}\}$  действительной частью, мнимой частью, модулем и аргументом.

10. Докажите, что если все корни многочлена  $P(z)$  вещественны, то для любого вещественного  $a$  все корни многочлена  $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$  также вещественны.