Задачи к 23.01.

(1) Доказать, что если линейный оператор в конечномерном линейном пространстве над произвольным полем идемпотентен (т.е. удовлетворяет уравнению $x^2 = x$), то он является оператором проектирования на подпространство.

(2) Мы видели, что множество подмножеств 2^X любого множества X является булевым кольцом относительно операций симметрической разности подмножеств в качестве сложения и пересечения подмножеств в качестве умножения. Придумать булево кольцо, не изоморфное описанному ни при каком множестве X.

(3) Пусь n — составное число. Придумать функцию из $\mathbb{Z}_n$ в $\mathbb{Z}_n$, которую нельзя задать многочленом.

(4) Придумать многочлен из $\mathbb{Z}_n[x]$ наименьшей степени, тождественно равный нулю на $\mathbb{Z}_n$, для а) $n = 30$, б) $n = 121$. Интересно еще потребовать, чтобы старший коэффициент был 1, тогда ответ будет другой.

(5) Перечислить (с точностью до изоморфизма) все кольца из 4 элементов. (Кажется, я эту задачу дать не успел, потому что ошибся со временем — закончил на 20 минут раньше, считая, что перерасхрдовал 10 минут...)