Листок 2.4

Ряды Фурье в L_2

срок сдачи (включая задачи со звёздочкой) 1 марта

Задача 1. Докажите, что пространство $L_2(\mathbb{R})$ сепарабельно.

Задача 2. Докажите, что следующие свойства линейного функционала φ в нормированном пространстве V равносильны:
1) φ ограничен на единичном шаре $\{x \in V : \|x\| \le 1\}$;
2) φ ограничен на единичной сфере $\{x \in V : \|x\| = 1\}$;
3) функция $\varphi(x)/\|x\|$ ограничена на множестве $V \setminus \{0\}$;
4) φ непрерывен в нуле;
5) φ непрерывен на всём V.

Задача 3. Продолжаются ли до непрерывных функционалов на $L_2(\mathbb{R})$ следующие функционалы, заданные на $C_2^0(\mathbb{R})$:
а) $f \mapsto f(0)$; б) $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$; в) $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx$, где $g \in C^0(\mathbb{R})$?

Задача 4. Найдите общий вид комплексно-линейного функционала в конечномерном эрмитовом пространстве.

Задача 5.* Докажите, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ не образуют базиса в $L_2[-1,1]$.

Задача 6. Напишите формулу разложения в ряд Фурье на $[-1,1]$ по системе полиномов Лежандра.

Задача 7 (связь рядов Фурье и рядов Лорана)**.** Пусть задан набор комплексных чисел a_k, $k \in \mathbb{Z}$, и числа $q \in (0,1)$, $C > 0$, для которых выполнено $|a_k| < Cq^{-|k|}$.
а) Докажите, что ряд $F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ сходится равномерно на любом компактном подмножестве области $\{z \in \mathbb{C} : |z| \in (q, 1/q)\}$.
б) Разложите в ряд Фурье ограничение $F|_{S^1}$ функции F на окружность $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Задача 8.* При каком необходимом и достаточном условии на ряд Фурье по экспонентам функция $f \in L_2[-\pi,\pi]$, продолженная по периодичности на $\mathbb{R}$, продолжается в верхнюю полуплоскость до голоморфной ограниченной функции?
Продолжимость означает существование функции $F(x+iy)$, $y > 0$, для которой семейство $f_y \colon x \mapsto F(x+iy)$, $x \in [-\pi,\pi]$ сходится к $f(x)$ в $L_2[-\pi,\pi]$ при $y \to 0$.

Задача 9.* Рассмотрим функцию $f \in L_2(S^1)$ и для некоторого действительного α положим

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\alpha k)$$

(мы полагаем здесь $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Найдите предел последовательности (f_n) в $L_2(S^1)$. Выразите ответ через коэффициенты Фурье функции f.
Указание. Ответ будет зависит от того, рационально ли отношение α/π.

Задача 10.* Функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(1)\ \varphi \ge 0, \quad (2)\ I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx < \infty, \quad (3)\ \operatorname{sign}(\varphi') = -\operatorname{sign}(x).$$

Положим $\psi(x) = \varphi(x)/I$. Докажите, что $\Delta_n(x) = n\psi(nx)$ является δ-образной последовательностью.

Задача 11. Постройте δ-образную последовательность вида $C_n e^{-nx^2}$.
Указание. Используйте равенство $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Задача 12.* Докажите, что любую финитную непрерывную функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ можно приблизить в равномерной метрике финитными бесконечно гладкими функциями.