Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

1-я и 2-я недели (9–18.01.2019)

Примерные задачи семинаров

Пространства со скаляным произведением (напоминание)

Задача 1.1. Пусть V — вещественное векторное пространство с (положительно определённым) скалярным произедением.
а) Докажите, что угол между любыми ненулевыми векторами u, v корректно определяется равенством $(u, v) = \sqrt{(u,u)\cdot(v,v)}\cos\angle(u,v)$.
б) Докажите, что $|u| = \sqrt{(u,u)}$ — норма на V.
в) Пусть B — симметрическая билинейная форма на вещественном векторном пространстве V. Как по функции $Q(x) = B(x,x)$ восстановить функцию B?

Задача 1.2. Пусть V — комплексное векторное пространство с эрмитовой формой.
а) Докажите, что $|u| = \sqrt{(u,u)}$ — норма на V.
б) Пусть B — симметрическая полуторалинейная форма на комплексном векторном пространстве V. Как по функции $Q(x) = B(x,x)$ восстановить функцию B?
в) Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в V. Выразите скалярное произведение (u, v) через координаты векторов u и v в этом базисе.

Задача 1.3. Пусть (u, v) — эрмитова форма на $\mathbb{C}^n$.
а) Докажите, что $\mathrm{Re}(u, v)$ — скалярное произведение, а $\mathrm{Im}(u, v)$ — симплектическая (невырожденная кососимметрическая) форма на $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$.
б) Восстановите (u, v) по $\mathrm{Re}(u, v)$ и оператору умножения на скаляр i.
в) Восстановите (u, v) по $\mathrm{Im}(u, v)$ и оператору умножения на скаляр i.
г*) Восстановите оператор умножения на скаляр i по $\mathrm{Re}(u, v)$ и $\mathrm{Im}(u, v)$.
д*) Можно ли восстановить (u, v) по $\mathrm{Re}(u, v)$, не используя умножения на i?

Пространство L_2

Задача 1.4. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ следующая функция принадлежит $L_2(\mathbb{R})$:
а) $|x|^\alpha$; б) $(1 + |x|)^\alpha$?

Задача 1.5. Восстановите симметричную би/полутора-линейную форму в вещественном/комплексном пространстве $L_2(\mathbb{R})$, квадратичная форма которой есть $Q(f) = \|f\|^2_{L_2}$.

Задача 1.6. Для каких непрерывных функций $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формула

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\psi(x)\,dx$$

задаёт эрмитово скалярное произведение в пространстве финитных непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$?

Задача 1.7. Компактна ли единичная сфера в $L_2(\mathbb{R})$? в $L_2[0, 1]$?

Задача 1.8. Докажите, что пространство $C^0_2(\mathbb{R})$ (пространство непрерывных функций с конечной L_2-нормой) не является полным.

Задача 1.9. Пусть степенной ряд сходится в $L_2[-1, 1]$. Оцените снизу его радиус сходимости.

Задача 1.10. Докажите, что следующие линейные функционалы ограничены в $L_2(\mathbb{R})$ и найдите их нормы:
а) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$, б) $\varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\varphi(x)\,dx$, в) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} x^n\varphi(x)\,dx$.

Ортогональные системы

Задача 1.11. Проверьте ортогональность следующих систем:
а) $E = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ в $L_2[-\pi, \pi]$;
б) $SC = \{1, \sin(nx), \cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$ в $L_2[-\pi, \pi]$;
в) $S = \{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$ в $L_2[0, \pi]$.
Указание: попробуйте свести в) к б), а б) к а).

Задача 1.12. Разложите в ряды Фурье по системам E и SC следующие функции:
а) $\cos^2 x$, б) $\sin^3 x$.

Задача 1.13. Найдите общий вид ряда Фурье для:
а) π-периодической функции по системе E;
б) нечётной функции по системе SC.
Указание: воспользуйтесь единственностью ряда Фурье.

Задача 1.14. Для пространства функций $L_2[0, T]$ (понимаемого как пространство функций с периодом T) постройте аналог ортогональной системы E и напишите формулу для коэффициентов ряда Фурье по этой системе.

Задача 1.15. Докажите, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ на отрезке $[-1, 1]$
а) линейно независимы;
б) образуют полную систему в $L_2[-1, 1]$ (их конечные линейные комбинации всюду плотны);
в*) не образуют базиса (не каждый элемент $L_2[-1, 1]$ можно представить в виде сходящегося в L_2 ряда $\sum a_n x^n$).

Задача 1.16 (Многочлены Лежандра)**.** Рассмотрим функции

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\big((x^2 - 1)^n\big).$$

а) Докажите, что Q_n — многочлен степени n. Исследуйте Q_n на чётность.
б) Докажите, что эти многочены попарно ортогональны в $L_2[-1, 1]$.
Указание: проверьте, что $Q_n \perp 1, x, \ldots, x^{n-1}$.
в) Найдите $Q_n(1)$.
Указание: воспользуйтесь тождеством $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$.
г) Определим *полиномы Лежандра* равенством $P_n(x) = Q_n(x)/Q_n(1)$. Докажите, что они образуют базис в $L_2[-1, 1]$.
д) Найдите $\|Q_n\|$ в $L_2[-1, 1]$.

Задача 1.17. Пусть $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_k \in \mathbb{C}$.
а) Разложите в ряд Фурье функцию $f_r(\theta) = P(re^{i\theta})$.
б) Будет ли отображение $\mathbb{R}^+ \to L_2(S_1)$, $r \mapsto f_r$ непрерывным?

Задача 1.18. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Положим $f_r(\theta) = F(re^{i\theta})$.
а) Оцените снизу радиус сходимости ряда в определении $F(z)$.
б) Докажите, что $f_r \in L_2(S^1)$ при всех $r \in [0, 1]$.
в) Будет ли отображение $[0, 1] \to L_2(S^1)$, $r \mapsto f_r$ непрерывным?

Задача 1.19. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}$, где $\sum |c_k| < \infty$. Докажите, что она продолжается непрерывно функцией, голоморфной в верхней полуплоскости, и оцените сверху её модуль.