

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
11 ЯНВАРЯ 2019

1. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

(а)  $\frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i}$ , (б)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ , (в)  $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}$ , (г)  $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

2. Найдите модули и аргументы следующих комплексных чисел:

(а)  $(-4+3i)^3$ , (б)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ , (в)  $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3. Докажите, что многочлен  $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$  делится на  $x^2 + 1$ .

4. Точки  $z_1$  и  $z_2$  – смежные вершины правильного  $n$ -угольника. Найдите вершину  $z_3$ , смежную с  $z_2$  ( $z_3 \neq z_1$ , нумерация против часовой стрелки).

5. Даны три вершины  $z_1, z_2, z_3$  параллелограмма, занумерованные в порядке следования по его границе. Найдите четвертую вершину параллелограмма.

6. Дайте геометрическое описание множеств

- (а)  $\{z: |z - z_1| = |z - z_2|\}$ ,  
(б)  $\{z: |z - 1| + |z + 1| = 2a\}$  ( $a > 1$ ),  
(в)  $\{z: \operatorname{Re}(1/z) = \frac{1}{2}\}$ .

7. Решите уравнение  $\bar{z} = z^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

8. Докажите равенство

$$|\sqrt{z^2 - 1} + z| + |\sqrt{z^2 - 1} - z| = |z - 1| + |z + 1|.$$

9. Найдите, во что переводят координатную сетку следующие отображения из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ : (а)  $z \mapsto z^2$ ; (б)  $z \mapsto e^z$ ; (в)  $z \mapsto 1/z$ .

10. Отображение  $z \mapsto z + (1/z)$  определено на множестве всех ненулевых комплексных чисел.

(а) Во что это отображение переводит множество  $\{z: |z| > 1\}$ ?

(б) Является ли это отображение взаимно-однозначным на данном множестве?

11. Пусть  $A > 0, C$  действительные, а  $B$  – комплексная постоянные и пусть  $AC < |B|^2$ . Докажите, что уравнение

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

является уравнением окружности и найдите центр этой окружности и ее радиус.

12. Пусть отображение задано формулой  $z \mapsto Az + B\bar{z}$ . Во что оно переводит окружность с центром в нуле?