

Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 2.

Задача 1. Опишите поле частных кольца (а) $\mathbb{Z}[i]$; (б) $\mathbb{Z}[x]$; (в) $\mathbb{C}[[x]]$.

(г) Верно ли, что поле частных $\mathbb{Z}[[x]]$ изоморфно $\mathbb{Q}((x))$?

(д) Покажите, что поле частных кольца $\mathbb{C}[[x, y]]$ не совпадает с $\mathbb{C}((x, y))$; (е) и с $\mathbb{C}((x))(y)$ тоже не совпадает.

(ж) Покажите, что поле частных $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ изоморфно $\mathbb{C}(t)$;

(з) Тот же вопрос про кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$.

Задача 2. Покажите, что следующие многочлены неприводимы над полем \mathbb{Q} :

(а) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$; (б) $x^{p-1} + \dots + x + 1$ (p – простое число);

(в) $x^5 + 33x^2 - 11x - 8$; (г) $x^5 - 5x^4 - 6x - 1$;

(д) $(x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$ (a_1, \dots, a_n – различные целые числа);

(е) $(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ (a_1, \dots, a_n – различные целые числа).

Задача 3. Покажите, что плоская комплексная кривая, заданная уравнением

(а) $y^2 = x^3 + px + q$;

(б) $y^3 + x^3 + cxy + cy + 1 = 0$ не является объединением двух разных алгебраических кривых.

Задача 4. Разложите на множители определитель матрицы:

$$(а) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$(б) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{pmatrix}.$$