Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 1.

Задача 1. Найдите НОД следующих двух элементов и его линейное выражение:

(а) 525 и 231 в $\mathbb{Z}$;

(б) 7777777 и 7777 в $\mathbb{Z}$;

(в) $2^m - 1$ и $2^n - 1$ в $\mathbb{Z}$;

(г) $x^m - 1$ и $x^n - 1$ в $\mathbb{Q}[x]$

(д) $x^4 - 4x^3 + 1$ и $x^3 - 3x^2 + 1$ в $\mathbb{Q}[x]$,

(е) $41 + 23i$ и $19 + 5i$ в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 2. Найдите образующую идеала (a, b, c) в кольце R, если

(а) $R = \mathbb{Z}$, $a = 30,\ b = 345,\ c = 144$;

(б) $R = \mathbb{Q}[x]$, $a = x^8 - 1,\ b = x^4 + 2x^2 + 1,\ c = x^6 + 1$;

(в) $R = \mathbb{Z}[i]$, $a = 30,\ b = 3 + 4i,\ c = 2 - 4i$.

Задача 3. Найдите факторы по идеалам из предыдущей задачи.

Задача 4. Докажите, что если многочлен f имеет кратный корень, то степень наибольшего общего делителя (f, f') больше 0. Вычислите НОД(f, f') для квадратного многочлена $f(x)$, как многочлен от коэффициентов f. Тот же вопрос для кубического многочлена.

Задача 5. **(а)** Найдите все обратимые целые гауссовы числа, чему равняется их норма?

(б) Разложите числа $2, 3, 5, 7, 11, 13$ в произведение простых гауссовых чисел.

(в) Те же вопросы для кольца чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\omega]$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Задача 6.

(а) Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$, где d – натуральное число. Покажите, что для функции квадрата расстояния:

$$N(a + b\sqrt{-d}) := a^2 + db^2$$

в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ определено деление с остатком если и только если $d = 1$ или $d = 2$.

(б) Покажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ нет однозначности разложения на множители, тем самым оно не евклидово.