Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

3-я — 5-я недели (23.01–08.02.2019)

Примерные задачи семинаров

δ-образные последовательности

Задача 2.1. Приведите пример следующих δ-образных последовательностей и нарисуйте их графики:
а) пропорциональные характеристической функции отрезка;
б) непрерывные кусочно линейные;
в) кусочно квадратичные.

Задача 2.2. Дана функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой
(1) $\varphi(x) \geq 0$, (2) $\operatorname{sign}(\varphi'(x)) = -\operatorname{sign}(x)$, (3) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$.
Докажите, что $\Delta_n\colon x \mapsto n\varphi(nx)$ — δ-образная последовательность.

Задача 2.3. Докажите, что $\Delta_n(x) = \dfrac{ne^{-n^2x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ — δ-образная последовательность, и нарисуйте её графики.

Равномерные приближения

Задача 2.4. Найдите последовательности многочленов $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$, равномерно приближающие следующие функции на указанных отрезках:
а) $|x|$ на $[-0{,}9, 0{,}9]$;
Указание: используйте, что $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$.
б) $\sin x$ на $[-a, a]$ $(a > 0)$; в) e^x на $[-a, a]$ $(a > 0)$; г) $\ln x$ на $[1/2, 3/2]$, на $[0{,}1, 0{,}9]$ и на $[0{,}5, 2{,}5]$.
д) Верно ли, что последовательности производных построенных многочленов равномерно сходятся?

Задача 2.5. Докажите, что на отрезке $[-R, R]$ остаточный член в ряде Тейлора для синуса удовлетворяет оценке

$$|\sin x - S_{2m-1}(x)| \leq \frac{R^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

где $S_n(x)$ — n-я частная смма ряда Тейлора для синуса.

Задача 2.6 (почленное интегрирование рядов Тейлора)**.**
а) Разложите в ряд Тейлора функцию $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и докажите, что его частные суммы равномерно сходятся к f на любом отрезке $|x| \leq a < 1$.
б) Та же задача для $F(x) = \arcsin x$.
Указание: сведите б) к а).

Задача 2.7. Пусть $|a| < 1$. Докажите, что ряд

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$

равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к $\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$. Оцените погрешность приближения частными суммами.
Указание: используйте формулу Эйлера и геометрическую прогрессию.

Дифференцирование под знаком интеграла

Задача 2.8. Пусть $I(y) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}$. При каких y функция I
а) принадлежит классу C^1; б) голоморфна?

Задача 2.9. При каких y функция $I(y) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}$ принадлежит классу C^1?

Задача 2.10. Найдите $\max_{x\in[0,+\infty)} f(x,y)$, где $f(x,y) = x^y e^{-x}$.

Задача 2.11. Докажите, что для любого $a > 0$ существует такое $C \in \mathbb{R}$, что при $y \in [0,a]$ функция $Ce^{-x/2}$ мажорирует функцию $f_y(x) = x^y e^{-x}$ на $[0,+\infty)$. Нарисуйте график функции f_y.

Гамма-функция

Задача 2.12. Докажите, что функция

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\, dx$$

принадлежит классу C^1: а) при $y > 1$; б) при $y > 0$.

Задача 2.13. Докажите, что функция

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty z^{y-1} e^{-x}\, dx$$

голоморфна в области $\operatorname{Re} z > 0$ (интегрирование ведётся по положительной полуоси).

Задача 2.14. На каких отрезках $y \in [a,b]$ семейство $f_y(x) = x^y$ мажорируется функцией со сходящимся на $[1,+\infty)$ интегралом?

Интегральные представления решений дифференциальных уравнений

Задача 2.15. Докажите, что интеграл

$$I(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\, dt$$

решает задачу $I^{(n+1)}(x) = f(x)$, $I(0) = \cdots = I^{(n)}(0) = 0$.

Задача 2.16 (интегральное представление решения уравнения Эйри)**.**
а) Пусть $L_y = D_y^2 - y$. Найдите $L_y e^{xy - \frac{x^3}{3}}$.
б) Найдите функцию $g(x,y)$, для $\partial g/\partial x(x,y) = L_y e^{xy-\frac{x^3}{3}}$.
в*) Докжите, что интеграл $I(y) = \int_\gamma e^{zy - \frac{z^3}{3}}\, dz$, взятый по контуру γ, составленному из $\mathbb{R}^+$ и $e^{2\pi i/3}\mathbb{R}^+$, удовлетворяет *уравнению Эйри*: $I'' - yI = 0$.

Задача 2.17. Проверьте, что функция $J_0(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{1-x^2}} dx$ удовлетворяет *уравнению Бесселя* $f'' + \frac{1}{y}f' + f = 0$.

Тригонометрические ряды Фурье

Задача 2.18. Используя выражения для синуса и косинуса через комплексные экспоненты, выведите из ортогональности системы $E = \{e^{inx}\}$ в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ ортогональность в том же пространстве системы $SC = \{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$.

Задача 2.19. Напишите формулы для коэффициентов Фурье по системам E и SC.

Задача 2.20. Докажите, что непрерывные функции на $[-\pi,\pi]$ с одинаковыми значениями на концах отрезка плотны в пространстве $L_2([-\pi,\pi])$.