Лекция $3-19$. δ-образные последовательности и теоремы о приближении

1 Гладкость функций и убывание коэффициентов Фурье

Теорема 1 *Пусть функция $f \in C^m(S^1), c_k$ – ее коэффициенты Фурье. Тогда $|c_k| < C|k|^{-m}$.*

Доказательство Индукция по m.

База индукции: $m = 0$. Пусть $f \in C(S^1)$. Тогда $|f| < C$,

$$2\pi c_k = \int_{S^1} f(x)e^{-ikx}dx, \ |c_k| < 2\pi C.$$

Шаг индукции: переход от m к $m+1$. Пусть $f' \in C^m(S^1), \ d_k, k \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье функции f'. Тогда, по предположению индукции, $|d_k| < C|k|^{-m}$. Далее, по определению коэффициентов Фурье

$$2\pi d_k = \int_{S^1} f'(x)e^{-ikx}dx = \int_{S^1} e^{-ikx}df(x) = ik\int_{S^1} f(x)e^{-ikx}dx = ik \cdot 2\pi c_k$$

Следовательно,

$$|c_k| \le \frac{|d_k|}{|k|} \le \frac{C}{|k|^{m+1}}.$$

□

Следствие 1 *Ряд Фурье дважды гладкой функции сходится равномерно.*

Справедливо более сильное утверждение

Следствие 2 *Ряд Фурье дважды гладкой функции сходится К НЕЙ равномерно.*

Это доказывается так. Сначала мы установим полноту системы E. Мы уже знаем, что непрерывные функции плотны в L_2 на отрезке. Поэтому для доказательства полноты системы E достаточно доказать следующую теорему Вейерштрасса:

Теорема 2 *Любая непрерывная функция на $[-\pi, \pi]$ с одинаковыми значениями на концах может быть (равномерно) приближена тригонометрическими многочленами.*

Из полноты системы E, по теореме Рисса следует, что ряд Фурье любой функции из $L_2([-\pi,\pi])$ сходится к ней в L_2. Если ряд Фурье функции f сходится равномерно к какой-то функции и сходится к f в L_2, значит он сходится к f равномерно.

Дальнейшая часть лекции преследует две цели: доказать полноту системы E в пространстве $L_2([-\pi,\pi])$ и ввести важный инструмент анализа - δ-образные последовательности.

2 δ-функция Дирака.

В 30-е годы прошлого века великий физик Поль Дирак ввел и использовал δ-функцию, обладающую следующими свойствами.

$\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$

$= \infty$ при $x = 0$

$\int \delta(x) = 1.$

Разумеется, такой функции не бывает. Тем не менее, для нее может быть "доказана"

thm:0 **Теорема 3** *Для любой непрерывной функции* $f \in C(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = f(0)$.

Доказательство По теореме о среднем, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(c)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx = f(c)$. При $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$, а интеграл с одной стороны, не меняется, а с другой, стремится к $f(0)$. $\square$

3 δ-образная последовательность.

Формализацией понятия δ-функции служит δ-образная последовательность.

Определение 1 *Последовательность* (Δ_n) *непрерывных или кусочно-непрерывных функций на прямой называется δ-образной последовательностью, если выполняются следующие требования:*

a) $\Delta_n \geq 0$ *b)* $\int_{\mathbb{R}} \Delta_n \to 1$ *c)* $\forall \varepsilon > 0 \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n \to 0$.

Когда область интегрирования не указана - это по умолчанию $\mathbb{R}$.

thm:1 **Теорема 4** *Для любой финитной непрерывной функции* f,

$$\int f(x)\Delta_n(x)dx := (f,\Delta_n) \to f(0)$$

при $n \to \infty$.

Доказательство $(f,\Delta_n) = I_n + J_n$, $I_n = \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)\Delta_n(x)dx$, $J_n = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)\Delta_n(x)dx$

$$|I_n| \le \max|f| \cdot \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n(x)dx \to 0,\ n\to\infty$$

в силу свойства c). По теореме о среднем, применимой, поскольку $\Delta_n \ge 0$,

$$J_n = f(c)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx.$$

Значение $f(c)$ близко к $f(0)$ при малом ε, а значение $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx$ близко к 1 при большом n. Следовательно, I_n мало, а J_n близко к $f(0)$. $\square$

4 Равномерность сходимости.

Следствие 3 *Пусть $f \in C^0(\mathbb{R})$, Δ_n – δ-образная последовательность. Тогда $f_n(y) = \int f(x)\Delta_n(x-y)dx \to f(y)$.*

thm:3 **Теорема 5** *В условиях следствия, стремление f_n к f равномерно: $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство Хотим доказать, что $\forall \alpha > 0 \exists N : \forall n > N$

$$|f_n(y) - f(y)| < \alpha. \tag{1}$$ eqn:3

Берем ε так, что $\operatorname{osc}_{[y-\varepsilon,y+\varepsilon]} f < \frac{\alpha}{4}\ \forall\ y$. Такое ε существует, поскольку f финитна и непрерывна. В силу b) и c) $\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n(x)dx \to 1$, $\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n(x)dx \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда неравенство (1) выполнено при выбранном ε и достаточно большом n. Действительно, пусть

$$f_n = I_n + J_n,\ I_n(y) = \int_{\mathbb{R}\setminus[y-\varepsilon,y+\varepsilon]} f(x)\Delta_n(x-y)dx,$$

$$J_n(y) = \int_{[y-\varepsilon,y+\varepsilon]} f(x)\Delta_n(x-y)dx.$$

Имеем:

$$|I_n(y)| \le \max|f| \int_{\mathbb{R}\setminus[y-\varepsilon,y+\varepsilon]} \Delta_n(x-y)dx = \max|f| \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n(x)dx < \frac{a}{2}$$

при достаточно большом n. Далее,

$$|J_n(y) - f(y)| = |\int_{\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+y)\Delta_n(x)dx - f(y)| = |f(y+c)\int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx - f(y)| \le$$

$$|f(y+c) - f(y)| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx + \max|f||1 - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx| < \frac{\alpha}{2}$$

при достаточно большом n. Это доказывает теорему. $\square$