

Субструктурные логики — от алгебры до лингвистики

С. Л. Кузнецов

Зимняя школа «Симметрия и сложность в математике»,
матфак ВШЭ, январь 2019

лекции 1–4, 1–2 февраля 2019 г.

Неклассические логики

Неклассические логические системы получаются модификацией классической логики:

Неклассические логики

Неклассические логические системы получаются модификацией классической логики:

1. добавлением новых логических операций:

Неклассические логики

Неклассические логические системы получаются модификацией классической логики:

1. добавлением новых логических операций:

- ▶ модальные логики: добавляется одноместная операция $\Box$, где $\Box A$ понимается как «необходимо A », «доказуемо A », «я знаю, что A », «я верю, что A », ...;

Неклассические логики

Неклассические логические системы получаются модификацией классической логики:

1. добавлением новых логических операций:

- ▶ модальные логики: добавляется одноместная операция $\Box$, где $\Box A$ понимается как «необходимо A », «доказуемо A », «я знаю, что A », «я верю, что A », ...; также рассматривается двойственная операция $\Diamond$ ($\Diamond A$ значит «возможно A », «добавление A не приводит к противоречию», «утверждение A не противоречит моим взглядам», ...)

Неклассические логики

Неклассические логические системы получаются модификацией классической логики:

1. добавлением новых логических операций:

- ▶ модальные логики: добавляется одноместная операция $\Box$, где $\Box A$ понимается как «необходимо A », «доказуемо A », «я знаю, что A », «я верю, что A », ...; также рассматривается двойственная операция $\Diamond$ ($\Diamond A$ значит «возможно A », «добавление A не приводит к противоречию», «утверждение A не противоречит моим взглядам», ...)

2. пересмотром значения существующих операций:
конъюнкции ($\wedge$), дизъюнкции ($\vee$), импликации ($\rightarrow$), отрицания ($\neg$) кванторов ($\forall$, $\exists$), ...

Неклассические логики

Неклассические логические системы получаются модификацией классической логики:

1. добавлением новых логических операций:

- ▶ модальные логики: добавляется одноместная операция $\Box$, где $\Box A$ понимается как «необходимо A », «доказуемо A », «я знаю, что A », «я верю, что A », ...; также рассматривается двойственная операция $\Diamond$ ($\Diamond A$ значит «возможно A », «добавление A не приводит к противоречию», «утверждение A не противоречит моим взглядам», ...)

2. пересмотром значения существующих операций: конъюнкции ($\wedge$), дизъюнкции ($\vee$), импликации ($\rightarrow$), отрицания ($\neg$) кванторов ($\forall$, $\exists$), ...

- ▶ первая ласточка — закон исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*tertium non datur*)

Логики без закона исключённого третьего

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:
 $\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:

$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:

$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

2. **Интуиционистская логика.**

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:

$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

2. **Интуиционистская логика.**

L. E. J. Brouwer. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik (1925)

A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (1930)

A. Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur (1925)

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:

$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

2. **Интуиционистская логика.**

L. E. J. Brouwer. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik (1925)

A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (1930)

A. Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur (1925)

- Мы можем считать A верным только если у нас есть *свидетельство* в пользу A .

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:

$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

2. **Интуиционистская логика.**

L. E. J. Brouwer. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik (1925)

A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (1930)

A. Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur (1925)

- ▶ Мы можем считать A верным только если у нас есть *свидетельство* в пользу A .
- ▶ Свидетельство для $A_1 \vee A_2$ — пара $\langle i, w \rangle$, где $i = 1, 2$, w — свидетельство для A_i .

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:
$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

2. **Интуиционистская логика.**

L. E. J. Brouwer. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik (1925)

A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (1930)

A. Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur (1925)

- ▶ Мы можем считать A верным только если у нас есть *свидетельство* в пользу A .
- ▶ Свидетельство для $A_1 \vee A_2$ — пара $\langle i, w \rangle$, где $i = 1, 2$, w — свидетельство для A_i .
- ▶ Например, R — гипотеза Римана. У нас нет свидетельства ни для R , ни для $\neg R$ — следовательно, и для $R \vee \neg R$.

Логики без закона исключённого третьего

1. **Трёхзначная логика.** К значениям «истина» и «ложь» добавляется третье истинностное значение ($\frac{1}{2}$). Закон исключённого третьего перестаёт быть справедливым:
$$\frac{1}{2} \vee \neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch filozoficzny* 5:170–171, 1920.

2. **Интуиционистская логика.**

L. E. J. Brouwer. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik (1925)

A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (1930)

A. Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur (1925)

- ▶ Мы можем считать A верным только если у нас есть *свидетельство* в пользу A .
- ▶ Свидетельство для $A_1 \vee A_2$ — пара $\langle i, w \rangle$, где $i = 1, 2$, w — свидетельство для A_i .
- ▶ Например, R — гипотеза Римана. У нас нет свидетельства ни для R , ни для $\neg R$ — следовательно, и для $R \vee \neg R$.

Классическая логика оказывается фрагментом интуиционистской: A выводимо в CL тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ выводимо в Int (теорема Гливенко).

Структурные правила: ослабление

Структурные правила: ослабление

Обозначение: $A_1, \dots, A_n \vdash B$ — формула B выводится из формул $A_1, \dots, A_n$. (Импликация на внешнем уровне.)

Структурные правила: ослабление

Обозначение: $A_1, \dots, A_n \vdash B$ — формула B выводится из формул $A_1, \dots, A_n$. (Импликация на внешнем уровне.)

Правило ослабления. $A \vdash (B \rightarrow A)$.

Структурные правила: ослабление

Обозначение: $A_1, \dots, A_n \vdash B$ — формула B выводится из формул $A_1, \dots, A_n$. (Импликация на внешнем уровне.)

Правило ослабления. $A \vdash (B \rightarrow A)$.

Пример: «если $\underbrace{2 \times 2 = 5}_A$, то $\underbrace{\text{Волга впадает в Каспийское море}}_B$ ».

Это утверждение можно вывести по правилу ослабления (из истинности B) или по принципу *ex falso* (поскольку A ложно). Тем не менее, будучи математически корректным, для естественного языка оно звучит странно.

Структурные правила: ослабление

Обозначение: $A_1, \dots, A_n \vdash B$ — формула B выводится из формул $A_1, \dots, A_n$. (Импликация на внешнем уровне.)

Правило ослабления. $A \vdash (B \rightarrow A)$.

Пример: «если $\underbrace{2 \times 2 = 5}_A$, то $\underbrace{\text{Волга впадает в Каспийское море}}_B$ ».

Это утверждение можно вывести по правилу ослабления (из истинности B) или по принципу *ex falso* (поскольку A ложно). Тем не менее, будучи математически корректным, для естественного языка оно звучит странно.

Пример 2: «если на планете μ Ara с есть жизнь, то $2 \times 2 = 4$ » (здесь доступен только вывод по правилу ослабления).

Структурные правила: ослабление

Обозначение: $A_1, \dots, A_n \vdash B$ — формула B выводится из формул $A_1, \dots, A_n$. (Импликация на внешнем уровне.)

Правило ослабления. $A \vdash (B \rightarrow A)$.

Пример: «если $\underbrace{2 \times 2 = 5}_A$, то $\underbrace{\text{Волга впадает в Каспийское море}}_B$ ».

Это утверждение можно вывести по правилу ослабления (из истинности B) или по принципу *ex falso* (поскольку A ложно). Тем не менее, будучи математически корректным, для естественного языка оно звучит странно.

Пример 2: «если на планете μ *Ara* с есть жизнь, то $2 \times 2 = 4$ » (здесь доступен только вывод по правилу ослабления).

Логические системы без правила ослабления называются **релевантными**.

Структурные правила: ослабление

Обозначение: $A_1, \dots, A_n \vdash B$ — формула B выводится из формул $A_1, \dots, A_n$. (Импликация на внешнем уровне.)

Правило ослабления. $A \vdash (B \rightarrow A)$.

Пример: «если $\underbrace{2 \times 2 = 5}_A$, то $\underbrace{\text{Волга впадает в Каспийское море}}_B$ ».

Это утверждение можно вывести по правилу ослабления (из истинности B) или по принципу *ex falso* (поскольку A ложно). Тем не менее, будучи математически корректным, для естественного языка оно звучит странно.

Пример 2: «если на планете μ Ara с есть жизнь, то $2 \times 2 = 4$ »
(здесь доступен только вывод по правилу ослабления).

Логические системы без правила ослабления называются **релевантными**.

И. Е. Орлов. Исчисление совместности предложений. *Матем. сб.* **35**(3–4), 263–286, 1928.
A. R. Anderson, N. D. Belnap (Jr.). Entailment: the logic of relevance and necessity, Vol. 1. Princeton Univ. Press, 1975.

Структурные правила: сокращение

Правило сокращения. Если $A, A \vdash B$, то $A \vdash B$.

Структурные правила: сокращение

Правило сокращения. Если $A, A \vdash B$, то $A \vdash B$.

Пример. Известно, что билет Москва – Санкт-Петербург стоит 2000 руб.; обратный билет стоит столько же.

$A \rightarrow B_1$: если у меня есть 2000 руб., я могу уехать из Москвы в Санкт-Петербург

$A \rightarrow B_2$: если у меня есть 2000 руб., я могу уехать из Санкт-Петербурга в Москву

Структурные правила: сокращение

Правило сокращения. Если $A, A \vdash B$, то $A \vdash B$.

Пример. Известно, что билет Москва – Санкт-Петербург стоит 2000 руб.; обратный билет стоит столько же.

$A \rightarrow B_1$: если у меня есть 2000 руб., я могу уехать из Москвы в Санкт-Петербург

$A \rightarrow B_2$: если у меня есть 2000 руб., я могу уехать из Санкт-Петербурга в Москву

Однако вывод по правилу сокращения сделать **нельзя**.

$A \rightarrow B_1 \wedge B_2$: если у меня есть 2000 руб., я могу съездить из Санкт-Петербурга в Москву и обратно

Структурные правила: сокращение

Правило сокращения. Если $A, A \vdash B$, то $A \vdash B$.

Пример. Известно, что билет Москва – Санкт-Петербург стоит 2000 руб.; обратный билет стоит столько же.

$A \rightarrow B_1$: если у меня есть 2000 руб., я могу уехать из Москвы в Санкт-Петербург

$A \rightarrow B_2$: если у меня есть 2000 руб., я могу уехать из Санкт-Петербурга в Москву

Однако вывод по правилу сокращения сделать **нельзя**.

$A \rightarrow B_1 \wedge B_2$: если у меня есть 2000 руб., я могу съездить из Санкт-Петербурга в Москву и обратно

Дело в том, что формула A выражает некий *ресурс*, который расходуется при использовании A (в отличие от математической теоремы, использование которой никак её не меняет).

Исчисление

Цель: выделить явно структурные правила.

Исчисление

Цель: выделить явно структурные правила.

Сформулируем исчисление в формате **естественного вывода**.

Исчисление

Цель: выделить явно структурные правила.

Сформулируем исчисление в формате **естественного вывода**.

Секвенция: $A_1, \dots, A_n \vdash B$

Исчисление

Цель: выделить явно структурные правила.

Сформулируем исчисление в формате **естественного вывода**.

Секвенция: $A_1, \dots, A_n \vdash B$

Аксиома: $A \vdash A$

Структурные правила:

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\Gamma, A, \Delta \vdash B} W \qquad \frac{\Gamma, A, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, A, \Delta \vdash B} C \\[2ex] \frac{\Gamma, \Phi, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, A, \Phi, \Delta \vdash B} P_1 \qquad \frac{\Gamma, A, \Phi, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Phi, A, \Delta \vdash B} P_2 \end{array}$$

Логические правила:

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow I \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash A \rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B} \rightarrow E$$

симметрично: $\leftarrow$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B} \otimes I \qquad \frac{\Delta \vdash A \otimes B \quad \Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, \Delta, \Gamma_2 \vdash C} \otimes E$$

Линейная логика

Линейная логика

1. Нет правила сокращения: ресурс можно использовать только один раз.

Линейная логика

1. Нет правила сокращения: ресурс можно использовать только один раз.
2. Нет правила ослабления: каждый ресурс должен быть использован.

Линейная логика

1. Нет правила сокращения: ресурс можно использовать только один раз.
2. Нет правила ослабления: каждый ресурс должен быть использован.

„Экономика должна быть экономной“.

– Л.И. Брежнев, XXVI съезд КПСС, 1981 г.

Линейная логика

1. Нет правила сокращения: ресурс можно использовать только один раз.
2. Нет правила ослабления: каждый ресурс должен быть использован.

„Экономика должна быть экономной“.

– Л.И. Брежнев, XXVI съезд КПСС, 1981 г.

J.-Y. Girard. Linear logic. *Theor. Comput. Sci.* **50**(1):1–102, 1987.

Линейная логика

1. Нет правила сокращения: ресурс можно использовать только один раз.
2. Нет правила ослабления: каждый ресурс должен быть использован.

„Экономика должна быть экономной“.

– Л.И. Брежнев, XXVI съезд КПСС, 1981 г.

J.-Y. Girard. Linear logic. *Theor. Comput. Sci.* **50**(1):1–102, 1987.

3. Остаётся правило перестановки (**коммутативность**).

Экспоненциал

А что делать с посылкой $F =$ „билет (в один конец) стоит 2000 руб.“ в нашем примере?

Экспоненциал

А что делать с посылкой $F =$ „билет (в один конец) стоит 2000 руб.“ в нашем примере?

- ▶ это **не ресурс**: пользоваться этой информацией можно сколько угодно раз (а можно вообще не пользоваться);

Экспоненциал

А что делать с посылкой $F =$ „билет (в один конец) стоит 2000 руб.“ в нашем примере?

- ▶ это **не ресурс**: пользоваться этой информацией можно сколько угодно раз (а можно вообще не пользоваться);
- ▶ значит, для этой формулы нужно разрешить правила сокращения и ослабления;

Экспоненциал

А что делать с посылкой $F = \text{„билет (в один конец) стоит 2000 руб.“}$ в нашем примере?

- ▶ это **не ресурс**: пользоваться этой информацией можно сколько угодно раз (а можно вообще не пользоваться);
- ▶ значит, для этой формулы нужно разрешить правила сокращения и ослабления;
- ▶ это делается с помощью специальной экспоненциальной модальности $!F$, под знаком которой допускаются правила W и C ;

Экспоненциал

А что делать с посылкой $F = \text{„билет (в один конец) стоит 2000 руб.“}$ в нашем примере?

- ▶ это **не ресурс**: пользоваться этой информацией можно сколько угодно раз (а можно вообще не пользоваться);
- ▶ значит, для этой формулы нужно разрешить правила сокращения и ослабления;
- ▶ это делается с помощью специальной экспоненциальной модальности $!F$, под знаком которой допускаются правила W и C ;
- ▶ с помощью экспоненциала можно погрузить с линейную логику интуиционистскую (а следовательно, и классическую).

Экспоненциал

А что делать с посылкой $F = \text{„билет (в один конец) стоит 2000 руб.“}$ в нашем примере?

- ▶ это **не ресурс**: пользоваться этой информацией можно сколько угодно раз (а можно вообще не пользоваться);
- ▶ значит, для этой формулы нужно разрешить правила сокращения и ослабления;
- ▶ это делается с помощью специальной экспоненциальной модальности $!F$, под знаком которой допускаются правила W и C ;
- ▶ с помощью экспоненциала можно погрузить с линейную логику интуиционистскую (а следовательно, и классическую).

*„Linear logic is not an alternative logic;
it should rather be seen as an extension of usual logic.“*

– J.-Y. Girard

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Monthly* **65**:154–170, 1958.

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Monthly* **65**:154–170, 1958.

Базовая категориальная грамматика: приведение синтаксических категорий с помощью правил $\rightarrow E$ и $\leftarrow E$.

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Monthly* **65**:154–170, 1958.

Базовая категориальная грамматика: приведение синтаксических категорий с помощью правил $\rightarrow E$ и $\leftarrow E$.

Пример. „Иван любит Марью“: $N, (N \rightarrow S) \leftarrow N, N \vdash S$.

Пример. „очень интересная книга“:

$(N \leftarrow N) \leftarrow (N \leftarrow N), N \leftarrow N, N \vdash N$.

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Monthly* **65**:154–170, 1958.

Базовая категориальная грамматика: приведение синтаксических категорий с помощью правил $\rightarrow E$ и $\leftarrow E$.

Пример. „Иван любит Марью“: $N, (N \rightarrow S) \leftarrow N, N \vdash S$.

Пример. „очень интересная книга“:

$(N \leftarrow N) \leftarrow (N \leftarrow N), N \leftarrow N, N \vdash N$.

K. Ajdukiewicz. Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica* **1**:1–27, 1935.

Y. Bar-Hillel. A quasi-arithmetical notation for syntactic description. *Language* **29**:47–58, 1953.

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Monthly* **65**:154–170, 1958.

Базовая категориальная грамматика: приведение синтаксических категорий с помощью правил $\rightarrow E$ и $\leftarrow E$.

Пример. „Иван любит Марью“: $N, (N \rightarrow S) \leftarrow N, N \vdash S$.

Пример. „очень интересная книга“:

$(N \leftarrow N) \leftarrow (N \leftarrow N), N \leftarrow N, N \vdash N$.

K. Ajdukiewicz. Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica* **1**:1–27, 1935.

Y. Bar-Hillel. A quasi-arithmetical notation for syntactic description. *Language* **29**:47–58, 1953.

Грамматика Ламбека: абстрагирование за счёт правил $\rightarrow I$ и $\leftarrow I$.

„Иван прочитал x “: $N, (N \rightarrow S) \leftarrow N, N \vdash S$.

„книга, которую Иван прочитал“:

$N, (N \rightarrow N) \leftarrow (S \leftarrow N), N, (N \rightarrow S) \leftarrow N \vdash N$

Некоммутативная линейная логика: исчисление Ламбека

Некоммутативный вариант был введён почти на 30 лет раньше самой линейной логики для задач **математической лингвистики**.

J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *Amer. Math. Monthly* **65**:154–170, 1958.

Базовая категориальная грамматика: приведение синтаксических категорий с помощью правил $\rightarrow E$ и $\leftarrow E$.

Пример. „Иван любит Марью“: $N, (N \rightarrow S) \leftarrow N, N \vdash S$.

Пример. „очень интересная книга“:

$(N \leftarrow N) \leftarrow (N \leftarrow N), N \leftarrow N, N \vdash N$.

K. Ajdukiewicz. Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica* **1**:1–27, 1935.

Y. Bar-Hillel. A quasi-arithmetical notation for syntactic description. *Language* **29**:47–58, 1953.

Грамматика Ламбека: абстрагирование за счёт правил $\rightarrow I$ и $\leftarrow I$.

„Иван прочитал x “: $N, (N \rightarrow S) \leftarrow N, N \vdash S$.

„книга, которую Иван прочитал“:

$N, (N \rightarrow N) \leftarrow (S \leftarrow N), N, (N \rightarrow S) \leftarrow N \vdash N$

B. Carpenter. Type-logical semantics. MIT Press, 1997.

G. V. Morrill. Categorical grammar: logical syntax, semantics, and processing. Oxford Univ. Press, 2011.

R. Moot, C. Retoré. The logic of categorial grammars: a deductive account of natural language syntax and semantics. Springer, 2012.

Алгебраический взгляд

$$A \otimes (A \rightarrow B) \vdash B$$

$$A \otimes B \vdash C \iff B \vdash A \rightarrow C$$

Получается, что $\rightarrow$ — операция левого деления, согласованная с частичным порядком $\vdash$ и умножением $\otimes$.

В коммутативном случае деление одно.

(Суб)экспоненциал в грамматиках Ламбека

„договор, который Иван подписал, не читая“

,

(Суб)экспоненциал в грамматиках Ламбека

„договор, который Иван подписал, не читая“

Иван подписал x , не читая x $\vdash S \leftarrow !N,$

(Суб)экспоненциал в грамматиках Ламбека

„договор, который Иван подписал, не читая“

Иван подписал x , не читая x $\vdash S \leftarrow !N,$

причём для $!$ разрешены правила перестановки и сокращения,
но не ослабления

Категорная интерпретация

Идея:

- ▶ *формулы* интерпретируются *объектами* некоторой категории $\mathcal{C}$;
- ▶ *морфизмы* $A \rightarrow B$ соответствуют *доказательствам* секвенции $A \vdash B$.

Моноидальные категории

- ▶ бифунктор $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$;
- ▶ единичный объект $\mathbb{1}$;

Моноидальные категории

- ▶ бифунктор $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$;
- ▶ единичный объект $\mathbb{1}$;
- ▶ естественные изоморфизмы:

$$\alpha_{A,B,C}: (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$$

$$\lambda_A: \mathbb{1} \otimes A \cong A$$

$$\rho_A: A \otimes \mathbb{1} \cong A$$

Моноидальные категории

- ▶ бифунктор $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$;
- ▶ единичный объект $\mathbb{1}$;
- ▶ естественные изоморфизмы:

$$\alpha_{A,B,C}: (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$$

$$\lambda_A: \mathbb{1} \otimes A \cong A$$

$$\rho_A: A \otimes \mathbb{1} \cong A$$

- ▶ условия когерентности

Условия когерентности

$$\begin{array}{ccc} & A \otimes (1 \otimes B) & \\ \swarrow id \otimes \lambda & & \searrow \alpha \\ A \otimes B & \xleftarrow{\rho \otimes id} & (A \otimes 1) \otimes B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & & \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \alpha & \\ A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & & & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\ \downarrow id \otimes \alpha & & & & \uparrow \alpha \otimes id \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & & & (A \otimes (B \otimes D)) \otimes D \end{array}$$

(Би)замкнутая моноидальная категория

(Би)замкнутая моноидальная категория

- ▶ для любых двух объектов A и B есть объект $A \Rightarrow B$;

(Би)замкнутая моноидальная категория

- ▶ для любых двух объектов A и B есть объект $A \Rightarrow B$;
- ▶ и морфизм $\text{eval}_{A,B}: A \otimes (A \Rightarrow B) \rightarrow B$;

(Би)замкнутая моноидальная категория

- ▶ для любых двух объектов A и B есть объект $A \Rightarrow B$;
- ▶ и морфизм $\text{eval}_{A,B}: A \otimes (A \Rightarrow B) \rightarrow B$;
- ▶ условие: для любого $f: A \otimes X \rightarrow B$ существует единственный $h: X \rightarrow (A \Rightarrow B)$, такой что $f = \text{eval}_{A,B} \circ (\text{id}_A \otimes h)$.

(Би)замкнутая моноидальная категория

- ▶ для любых двух объектов A и B есть объект $A \Rightarrow B$;
- ▶ и морфизм $\text{eval}_{A,B}: A \otimes (A \Rightarrow B) \rightarrow B$;
- ▶ условие: для любого $f: A \otimes X \rightarrow B$ существует единственный $h: X \rightarrow (A \Rightarrow B)$, такой что $f = \text{eval}_{A,B} \circ (\text{id}_A \otimes h)$.
- ▶ Получается бифунктор $\Rightarrow$, ковариантный по второму аргументу и контравариантный по первому ($\Rightarrow: \mathcal{C}^{\text{op}} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$), *интернализующий морфизмы* категории $\mathcal{C}$ как её объекты.

(Би)замкнутая моноидальная категория

- ▶ для любых двух объектов A и B есть объект $A \Rightarrow B$;
- ▶ и морфизм $\text{eval}_{A,B}: A \otimes (A \Rightarrow B) \rightarrow B$;
- ▶ условие: для любого $f: A \otimes X \rightarrow B$ существует единственный $h: X \rightarrow (A \Rightarrow B)$, такой что $f = \text{eval}_{A,B} \circ (\text{id}_A \otimes h)$.
- ▶ Получается бифунктор $\Rightarrow$, ковариантный по второму аргументу и контравариантный по первому ($\Rightarrow: \mathcal{C}^{\text{op}} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$), интернализирующий морфизмы категории $\mathcal{C}$ как её объекты.
- ▶ Бизамкнутая категория: симметричные условия для $B \Leftarrow A$.

(Би)замкнутая моноидальная категория

- ▶ для любых двух объектов A и B есть объект $A \Rightarrow B$;
- ▶ и морфизм $\text{eval}_{A,B}: A \otimes (A \Rightarrow B) \rightarrow B$;
- ▶ условие: для любого $f: A \otimes X \rightarrow B$ существует единственный $h: X \rightarrow (A \Rightarrow B)$, такой что $f = \text{eval}_{A,B} \circ (\text{id}_A \otimes h)$.
- ▶ Получается бифунктор $\Rightarrow$, ковариантный по второму аргументу и контравариантный по первому ($\Rightarrow: \mathcal{C}^{\text{op}} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$), *интернализующий морфизмы* категории $\mathcal{C}$ как её объекты.
- ▶ Бизамкнутая категория: симметричные условия для $B \Leftarrow A$.
- ▶ Частный случай: декартово замкнутые категории, в которых $\otimes$ есть категорное произведение. Эти категории задают интерпретацию **интуиционистской логики**.

Симметричная моноидальная категория

- ▶ коммутативный случай

Симметричная моноидальная категория

- ▶ коммутативный случай
- ▶ естественный изоморфизм $\sigma_{A,B}: A \otimes B \cong B \otimes A$

Симметричная моноидальная категория

- ▶ коммутативный случай
- ▶ естественный изоморфизм $\sigma_{A,B}: A \otimes B \cong B \otimes A$
- ▶ условия когерентности ...

Условия когерентности

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \rho_A \nearrow & & \nwarrow \lambda_A \\
 A \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\sigma_{A,\mathbb{1}}} & \mathbb{1} \otimes A
 \end{array}
 \qquad
 A \otimes B \begin{array}{c} \xleftarrow{\sigma_{B,A}} \\ \xrightarrow{\sigma_{A,B}} \end{array} B \otimes A$$

$$\begin{array}{ccccc}
 (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A \\
 \sigma_{A,B} \otimes \text{id}_C \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{B,C,A} \\
 (B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{B,A,C}} & B \otimes (A \otimes C) & \xrightarrow{\text{id}_B \otimes \sigma_{A,C}} & B \otimes (C \otimes A)
 \end{array}$$

Примеры

Примеры

- ▶ Категория $\mathbf{SET}$: $A \Rightarrow B$ — множество функций из A в B

Примеры

- ▶ Категория $\mathbf{SET}$: $A \Rightarrow B$ — множество функций из A в B
- ▶ Категория модулей над кольцом R (в частности, категории линейных пространств и абелевых групп).

Интерпретация экспоненциала: комонада

... в следующий раз

Исчисление генценовского типа

$$A \vdash A$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, A \rightarrow B, \Delta \vdash C} \quad \frac{A, \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \rightarrow B} \\
 \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B \leftarrow A, \Pi, \Delta \vdash C} \quad \frac{\Pi, A \vdash B}{\Pi \vdash B \leftarrow A} \\
 \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash C} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B} \\
 \frac{\Gamma, A_1, \Delta \vdash C \quad \Gamma, A_2, \Delta \vdash C}{\Gamma, A_1 \vee A_2, \Delta \vdash C} \quad \frac{\Pi \vdash A_i}{\Pi \vdash A_1 \vee A_2} \\
 \frac{\Gamma, A_i, \Delta \vdash C}{\Gamma, A_1 \wedge A_2, \Delta \vdash C} \quad \frac{\Pi \vdash A_1 \quad \Pi \vdash A_2}{\Pi \vdash A_1 \wedge A_2} \\
 \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, !A, \Delta \vdash C} \quad \frac{!B_1, \dots, !B_n \vdash A}{!B_1, \dots, !B_n \vdash !A} \\
 \frac{\Gamma, \Delta \vdash C}{\Gamma, !A, \Delta \vdash C} \quad \frac{\Gamma, !A, \Phi, !A, \Delta \vdash C}{\Gamma, !A, \Phi, \Delta \vdash C} \quad \frac{\Gamma, !A, \Phi, !A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Phi, !A, \Delta \vdash C}
 \end{array}$$

Сравнение декартова и тензорного произведения

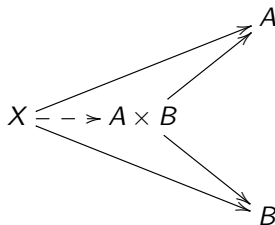
- ▶ Декартово произведение (прямая сумма) линейных пространств — состоит из формальных сумм вида $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$.

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Декартово произведение (прямая сумма) линейных пространств — состоит из формальных сумм вида $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$.
 - ▶ $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$

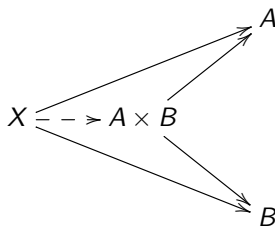
Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Декартово произведение (прямая сумма) линейных пространств — состоит из формальных сумм вида $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$.
 - ▶ $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$
 - ▶ Свойство универсальности:



Сравнение декартова и тензорного произведения

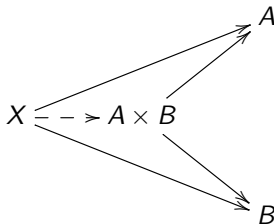
- ▶ Декартово произведение (прямая сумма) линейных пространств — состоит из формальных сумм вида $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$.
 - ▶ $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$
 - ▶ Свойство универсальности:



- ▶ Имеются **естественные** морфизмы $d_A: A \rightarrow A \times A$ и $e_A: A \rightarrow \mathbf{1}$ (где $\mathbf{1}$ — нульмерное пространство).

Сравнение декартова и тензорного произведения

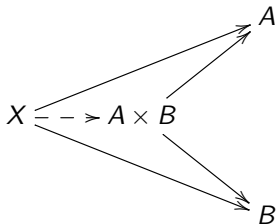
- ▶ Декартово произведение (прямая сумма) линейных пространств — состоит из формальных сумм вида $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$.
 - ▶ $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$
 - ▶ Свойство универсальности:



- ▶ Имеются **естественные** морфизмы $d_A: A \rightarrow A \times A$ и $e_A: A \rightarrow \mathbf{1}$ (где $\mathbf{1}$ — нульмерное пространство).
- ▶ Следовательно, получаем корректную интерпретацию **интуиционистской** конъюнкции.

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Декартово произведение (прямая сумма) линейных пространств — состоит из формальных сумм вида $v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$.
 - ▶ $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$
 - ▶ Свойство универсальности:



- ▶ Имеются **естественные** морфизмы $d_A: A \rightarrow A \times A$ и $e_A: A \rightarrow \mathbf{1}$ (где $\mathbf{1}$ — нульмерное пространство).
- ▶ Следовательно, получаем корректную интерпретацию **интуиционистской** конъюнкции.
- ▶ В общем случае — понятие декартова замкнутой категории; категория линейных пространств незамкнута!

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$: получается факторизацией пространства с **базисом** $V_1 \times V_2$ по естественной эквивалентности:

$$(v, w) + (u, w) \sim (v + u, w) \quad (w, v) + (w, u) \sim (w, v + u) \\ c(v, w) \sim (cv, w) \sim (v, cw)$$

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$: получается факторизацией пространства с **базисом** $V_1 \times V_2$ по естественной эквивалентности:

$$(v, w) + (u, w) \sim (v + u, w) \quad (w, v) + (w, u) \sim (w, v + u) \\ c(v, w) \sim (cv, w) \sim (v, cw)$$

- ▶ $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$: получается факторизацией пространства с базисом $V_1 \times V_2$ по естественной эквивалентности:

$$\begin{aligned}(v, w) + (u, w) &\sim (v + u, w) & (w, v) + (w, u) &\sim (w, v + u) \\ c(v, w) &\sim (cv, w) \sim (v, cw)\end{aligned}$$

- ▶ $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$
- ▶ Свойство универсальности: для любого билинейного $h: A \times B \rightarrow Z$ (не является морфизмом в категории!) $h = \varphi \circ \tilde{h}$, где $\varphi: A \otimes B \rightarrow Z$. «Посредством тензорного произведения билинейная функция становится линейной».

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$: получается факторизацией пространства с **базисом** $V_1 \times V_2$ по естественной эквивалентности:

$$\begin{aligned}(v, w) + (u, w) &\sim (v + u, w) & (w, v) + (w, u) &\sim (w, v + u) \\ c(v, w) &\sim (cv, w) \sim (v, cw)\end{aligned}$$

- ▶ $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$
- ▶ Свойство универсальности: для любого **билинейного** $h: A \times B \rightarrow Z$ (не является морфизмом в категории!) $h = \varphi \circ \tilde{h}$, где $\varphi: A \otimes B \rightarrow Z$. «Посредством тензорного произведения билинейная функция становится линейной».
- ▶ Естественных нетривиальных морфизмов d и e **нет**.

Сравнение декартова и тензорного произведения

- ▶ Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$: получается факторизацией пространства с **базисом** $V_1 \times V_2$ по естественной эквивалентности:

$$(v, w) + (u, w) \sim (v + u, w) \quad (w, v) + (w, u) \sim (w, v + u) \\ c(v, w) \sim (cv, w) \sim (v, cw)$$

- ▶ $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$
- ▶ Свойство универсальности: для любого **билинейного** $h: A \times B \rightarrow Z$ (не является морфизмом в категории!) $h = \varphi \circ \tilde{h}$, где $\varphi: A \times B \rightarrow A \otimes B$. «Посредством тензорного произведения билинейная функция становится линейной».
- ▶ Естественных нетривиальных морфизмов d и e **нет**.
- ▶ Получаем модель **линейной** логики (импликация — за счёт моноидальной замкнутости).

Интерпретация экспоненциала: моноидальная комонада

S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic.

Интерпретация экспоненциала: моноидальная комонада

S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic.

► Комонада.

$$Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\varepsilon_A: QA \rightarrow A$$

$$\delta_A: QA \rightarrow QQA$$

Интерпретация экспоненциала: моноидальная комонада

S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic.

► Комонада.

$$Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\varepsilon_A: QA \rightarrow A$$

$$\delta_A: QA \rightarrow QQA$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & & \delta_{QA} \downarrow \\ QQA & \xrightarrow{Q\delta_A} & QQQA \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & \searrow \text{id}_{QA} & \downarrow \varepsilon_{QA} \\ QQA & \xrightarrow{Q\varepsilon_A} & QA \end{array}$$

Интерпретация экспоненциала: моноидальная комонада

S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic.

► Комонада.

$$Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\varepsilon_A: QA \rightarrow A$$

$$\delta_A: QA \rightarrow QQA$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & & \delta_{QA} \downarrow \\ QQA & \xrightarrow{Q\delta_A} & QQQA \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & \searrow \text{id}_{QA} & \downarrow \varepsilon_{QA} \\ QQA & \xrightarrow{Q\varepsilon_A} & QA \end{array}$$

► Пример: $Q = V_0 \times _$

Интерпретация экспоненциала: моноидальная комонада

S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic.

► Комонада.

$$Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\varepsilon_A: QA \rightarrow A$$

$$\delta_A: QA \rightarrow QQA$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & & \delta_{QA} \downarrow \\ QQA & \xrightarrow{Q\delta_A} & QQQA \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & \searrow \text{id}_{QA} & \downarrow \varepsilon_{QA} \\ QQA & \xrightarrow{Q\varepsilon_A} & QA \end{array}$$

- Пример: $Q = V_0 \times _$
- Стрелка Клейсли: $f: QA \rightarrow B$.

Интерпретация экспоненциала: моноидальная комонада

S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic.

► Комонада.

$$Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\varepsilon_A: QA \rightarrow A$$

$$\delta_A: QA \rightarrow QQA$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & & \downarrow \delta_{QA} \\ QQA & \xrightarrow{Q\delta_A} & QQQA \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\delta_A} & QQA \\ \delta_A \downarrow & \searrow \text{id}_{QA} & \downarrow \varepsilon_{QA} \\ QQA & \xrightarrow{Q\varepsilon_A} & QA \end{array}$$

► Пример: $Q = V_0 \times _$

► Стрелка Клейсли: $f: QA \rightarrow B$.

Композиция: $QA \xrightarrow{\delta_A} QQA \xrightarrow{Qf} QB \xrightarrow{g} C$

Комонада интерпретирует слабый !

- ▶ Экспоненциал с урезанным набором правил (никаких структурных правил, и в правом правиле только одна формула слева):

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \quad \frac{!B \vdash A}{!B \vdash !A}$$

Комонада интерпретирует слабый !

- ▶ Экспоненциал с урезанным набором правил (никаких структурных правил, и в правом правиле только одна формула слева):

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \quad \frac{!B \vdash A}{!B \vdash !A}$$

- ▶ Первому правилу соответствует ε_A (точнее, $\text{id}_\Gamma \otimes \varepsilon_A \otimes \text{id}_\Delta$); второму — $\delta_B \circ Qf$ (как стрелка Клейсли поднимает морфизм $QB \rightarrow A$ до $QB \rightarrow QA$).

Комонада интерпретирует слабый !

- ▶ Экспоненциал с урезанным набором правил (никаких структурных правил, и в правом правиле только одна формула слева):

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \quad \frac{!B \vdash A}{!B \vdash !A}$$

- ▶ Первому правилу соответствует ε_A (точнее, $\text{id}_\Gamma \otimes \varepsilon_A \otimes \text{id}_\Delta$); второму — $\delta_B \circ Qf$ (как стрелка Клейсли поднимает морфизм $QB \rightarrow A$ до $QB \rightarrow QA$).
- ▶ Комонадические законы соответствуют преобразованиям упрощения доказательств.

Комонада интерпретирует слабый !

- ▶ Экспоненциал с урезанным набором правил (никаких структурных правил, и в правом правиле только одна формула слева):

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \quad \frac{!B \vdash A}{!B \vdash !A}$$

- ▶ Первому правилу соответствует ε_A (точнее, $\text{id}_\Gamma \otimes \varepsilon_A \otimes \text{id}_\Delta$); второму — $\delta_B \circ Qf$ (как стрелка Клейсли поднимает морфизм $QB \rightarrow A$ до $QB \rightarrow QA$).
- ▶ Комонадические законы соответствуют преобразованиям упрощения доказательств.
- ▶ Чтобы допустить настоящее правило

$$\frac{!B_1, \dots, !B_2 \vdash A}{!B_1, \dots, !B_n \vdash !A}$$

нужна дистрибутивность:

$$m_0: \mathbb{1} \rightarrow Q\mathbb{1} \quad (m_2)_{B_1, B_2}: QB_1 \otimes QB_2 \rightarrow Q(B_1 \otimes B_2)$$

(+ условия когерентности)

Ослабление, сокращение, перестановка

- ▶ Ослабление: $e_A: QA \rightarrow \mathbb{1}$
- ▶ Сокращение: $d_A: QA \rightarrow QA \otimes QA$
- ▶ Перестановка: $p_{A,B}: QA \otimes B \cong B \otimes QA$

Алгебраические модели (без экспоненциала)

Решётка с делениями $(A; \preceq, \cdot, \mathbf{1}, \backslash, /, \sqcap, \sqcup)$

- ▶ моноид;
- ▶ частичный порядок;
- ▶ $b \preceq a \backslash c \iff ab \preceq c \iff a \preceq c / b$;
- ▶ решётка.

Алгебраические модели (без экспоненциала)

Решётка с делениями $(A; \preceq, \cdot, \mathbf{1}, \backslash, /, \sqcap, \sqcup)$

- ▶ моноид;
- ▶ частичный порядок;
- ▶ $b \preceq a \backslash c \iff ab \preceq c \iff a \preceq c / b$;
- ▶ решётка.

Примеры:

- ▶ алгебра формальных языков над некоторым алфавитом (L-модели);
- ▶ алгебра бинарных отношений на некотором множестве (R-модели).

Результаты о (не)полноте

- ▶ $\backslash, /, \cdot$, R-полнота: Андрека, Микулаш 1991
- ▶ $\backslash, /, \cdot$, L-полнота: Пентус 1995

Результаты о (не)полноте

- ▶ $\backslash, /, \cdot$, R-полнота: Андрека, Микулаш 1991
- ▶ $\backslash, /, \cdot$, L-полнота: Пентус 1995
- ▶ с $\sqcap, \sqcup$: неполнота — не выводится закон дистрибутивности
 $A \sqcap (B \sqcup C) \vdash (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C)$

Результаты о (не)полноте

- ▶ $\backslash, /, \cdot$, R-полнота: Андрека, Микулаш 1991
- ▶ $\backslash, /, \cdot$, L-полнота: Пентус 1995
- ▶ с $\sqcap, \sqcup$: неполнота — не выводится закон дистрибутивности $A \sqcap (B \sqcup C) \vdash (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C)$
- ▶ есть другие примеры алгебр, относительно которых будет полнота (например, модели на синтаксических решётках понятий)

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

- ▶ Теперь рассмотрим множество слов, которые могут встречаться в этих контекстах:

$$A^{\triangleright \triangleleft} = \{w \mid \forall (u_1, u_2) \in A^{\triangleright} \ u_1 w u_2 \in L\}$$

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

- ▶ Теперь рассмотрим множество слов, которые могут встречаться в этих контекстах:

$$A^{\triangleright \triangleleft} = \{w \mid \forall (u_1, u_2) \in A^{\triangleright} \ u_1 w u_2 \in L\} \supseteq A$$

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

- ▶ Теперь рассмотрим множество слов, которые могут встречаться в этих контекстах:

$$A^{\triangleright\triangleleft} = \{w \mid \forall (u_1, u_2) \in A^{\triangleright} \ u_1 w u_2 \in L\} \supseteq A$$

- ▶ Например, если в A лежит слово «собака», то в его замыкании $A^{\triangleright\triangleleft}$ окажется также слово «кошка».

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

- ▶ Теперь рассмотрим множество слов, которые могут встречаться в этих контекстах:

$$A^{\triangleright\triangleleft} = \{w \mid \forall (u_1, u_2) \in A^{\triangleright} \ u_1 w u_2 \in L\} \supseteq A$$

- ▶ Например, если в A лежит слово «собака», то в его замыкании $A^{\triangleright\triangleleft}$ окажется также слово «кошка».
- ▶ A замкнутое, если $A = A^{\triangleright\triangleleft}$.

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

- ▶ Теперь рассмотрим множество слов, которые могут встречаться в этих контекстах:

$$A^{\triangleright\triangleleft} = \{w \mid \forall (u_1, u_2) \in A^{\triangleright} \ u_1 w u_2 \in L\} \supseteq A$$

- ▶ Например, если в A лежит слово «собака», то в его замыкании $A^{\triangleright\triangleleft}$ окажется также слово «кошка».
- ▶ A замкнутое, если $A = A^{\triangleright\triangleleft}$.
- ▶ Умножение интерпретируется как $(A \cdot B)^{\triangleright\triangleleft}$; деление замкнутых множеств автоматически оказывается замкнутым.

Синтаксические решётки понятий

- ▶ Зафиксируем язык L („все правильные предложения“).
- ▶ Для каждого языка A рассмотрим множество пар

$$A^{\triangleright} = \{(u_1, u_2) \mid \forall v \in A \ u_1 v u_2 \in L\}$$

(множество контекстов, в которых могут встречаться слова из A)

- ▶ Теперь рассмотрим множество слов, которые могут встречаться в этих контекстах:

$$A^{\triangleright\triangleleft} = \{w \mid \forall (u_1, u_2) \in A^{\triangleright} \ u_1 w u_2 \in L\} \supseteq A$$

- ▶ Например, если в A лежит слово «собака», то в его замыкании $A^{\triangleright\triangleleft}$ окажется также слово «кошка».
- ▶ A замкнутое, если $A = A^{\triangleright\triangleleft}$.
- ▶ Умножение интерпретируется как $(A \cdot B)^{\triangleright\triangleleft}$; деление замкнутых множеств автоматически оказывается замкнутым.
- ▶ Имеет место теорема о полноте (Вурм 2017).

Результаты об алгоритмической сложности

- ▶ $\backslash, /, \cdot, :$ NP-полная (Пентус 2006); есть полиномиальные алгоритмы для фрагментов (Пентус 2010, Саватеев 2006, ...)

Результаты об алгоритмической сложности

- ▶ $\backslash, /, \cdot, :$ NP-полная (Пентус 2006); есть полиномиальные алгоритмы для фрагментов (Пентус 2010, Саватеев 2006, ...)
- ▶ $\backslash, /, \cdot, \sqcup, \sqcap$: PSPACE-полная (Канович 1994)

Результаты об алгоритмической сложности

- ▶ $\backslash, /, \cdot, :$ NP-полная (Пентус 2006); есть полиномиальные алгоритмы для фрагментов (Пентус 2010, Саватеев 2006, ...)
- ▶ $\backslash, /, \cdot, \sqcup, \sqcap$: PSPACE-полная (Канович 1994)
- ▶ $\backslash, /, \cdot, !$: неразрешимая (Линкольн и др. 1991, Канович и др. 2016)

Итерация Клини

► $a^* = \sup\{a^n \mid n \geq 0\}$

Итерация Клини

- ▶ $a^* = \sup\{a^n \mid n \geq 0\}$
- ▶ аксиоматизация с помощью ω -правила:

$$\frac{(\Gamma, A^n, \Delta \rightarrow C)_{n=0}^{\infty}}{\Gamma, A^*, \Delta \vdash C}$$

Итерация Клини

- ▶ $a^* = \sup\{a^n \mid n \geq 0\}$
- ▶ аксиоматизация с помощью ω -правила:

$$\frac{(\Gamma, A^n, \Delta \rightarrow C)_{n=0}^{\infty}}{\Gamma, A^*, \Delta \vdash C}$$

- ▶ логика не является рекурсивно перечислимой (Бушковский 2007) $\Rightarrow$ финитная аксиоматизация невозможна

Итерация Клини

- ▶ $a^* = \sup\{a^n \mid n \geq 0\}$
- ▶ аксиоматизация с помощью ω -правила:

$$\frac{(\Gamma, A^n, \Delta \rightarrow C)_{n=0}^{\infty}}{\Gamma, A^*, \Delta \vdash C}$$

- ▶ логика не является рекурсивно перечислимой (Бушковский 2007) $\Rightarrow$ финитная аксиоматизация невозможна
- ▶ правила индукции для $*$ (например, «чистая индукция» Пратта: $(A \rightarrow A)^* \vdash A \rightarrow A$) оказываются слабее ω -правила

Литература

- ▶ S. Abramsky, N. Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic. In: *New Structures for Physics*, B. Coecke (ed). *Lect. Notes Phys.* vol. 813, pp. 3–94, Springer, 2011. <https://arxiv.org/abs/1102.1313>
- ▶ H. Andréka, Sz. Mikulás. Lambek calculus and its relational semantics: completeness and incompleteness. *J. Log. Lang. Inform.* **3**:1–37, 1994.
- ▶ W. Buszkowski, E. Palka. Infinitary action logic: complexity, models and grammars. *Studia Logica* **89**:1–18, 2008.
<http://buszko.home.amu.edu.pl/actlogs12.pdf>
- ▶ B. Carpenter. Type-logical semantics. MIT Press, 1997.
- ▶ D. van Dalen. Logic and Structure (5th edition). Springer, 2013.
- ▶ P. Jipsen. From semirings to residuated Kleene lattices. *Studia Logica* **76**:291–303, 2004.
<http://www1.chapman.edu/~jipsen/talks/AsubL2002/jipsenAsubL030908.pdf>
- ▶ M. Kanovich, S. Kuznetsov, V. Nigam, A. Scedrov. Subexponentials in non-commutative linear logic. *Math. Struct. Comput. Sci.*, FirstView, 2018.
<https://arxiv.org/abs/1709.03607>
- ▶ S. Kuznetsov. *-continuity vs. induction: divide and conquer. *Advances in Modal Logic* vol. 12, pp. 493–510, College Publications, 2018. http://www.mi-ras.ru/~sk/wissenschaft/aiml18_divide_and_conquer_revised_with_bib.pdf

Литература

- ▶ R. Moot, C. Retoré. The logic of categorial grammars: a deductive account of natural language syntax and semantics. Springer, 2012.
- ▶ G. V. Morrill. Categorial grammar: logical syntax, semantics, and processing. Oxford Univ. Press, 2011.
- ▶ П. С. Новиков. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977.
- ▶ М. Р. Пентус. Полнота синтаксического исчисления Ламбека. *Фундам. прикл. матем.* 5(1):193–219, 1999. <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=374>
- ▶ G. Restall. An introduction to substructural logics. Routledge, 2000. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.183.9741>
- ▶ P. Schroeder-Heister, K. Došen (eds.). Substructural logics (*Studies in Logic and Computation* vol. 2). Oxford Univ. Press, 1993.
- ▶ *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/>
- ▶ G. Takeuti. Proof Theory. (*Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* vol. 81). North-Holland (Elsevier), 1987.
Рус. пер.: Г. Такеути. Теория доказательств. М.: Мир, 1978.