Лекции 3-5

Алгебра Ивахори-Гекке

§1 Элементы Юциса-Мэрфи

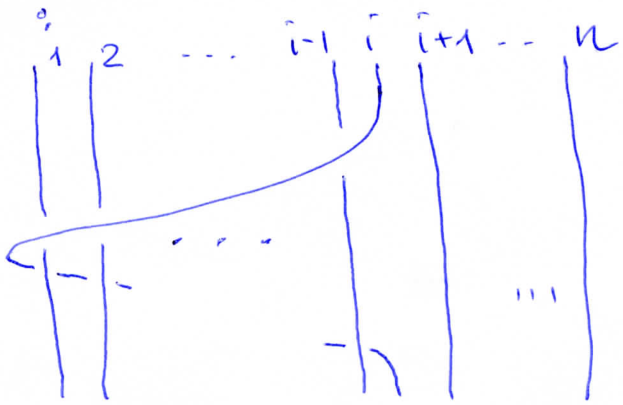
Замечательный набор элементов в группе кос J_i, $i = 1, 2 \dots n$, задаётся индуктивно:

$$\boxed{J_1 = 1, \quad J_{i+1} = b_i J_i b_i \qquad i \geq 1} \quad (1а)$$

или явной формулой

$$\boxed{J_i = b_{i-1} b_{i-2} \dots b_2 b_1^2 b_2 \dots b_{i-1} b_i} \quad (1б)$$

или графически

$J_i =$ 

(1в)

J_i называются <u>элементами Юциса-Мэрфи</u>. Они были введены в рассмотрение А. Юцисом (A. Jucys, 1966-1974) и, независимо G. Murphy (1981) при изучении симметрической группы. В силу специфики симм. группы (в ней все $J_i \equiv 1$) определение, данное этим элементам Юцисом и Мэрфи, отличалось от приведённого выше (см. Упражнение ниже).

Важнейшее свойство J_i — они коммутативны:

$$\boxed{J_i J_j = J_j J_i} \qquad (2)$$

Этим они выгодно отличаются от похожих элементов A_{1i}.

Графически коммутативность вполне очевидна.

<u>Упражнение 1</u>: докажите (2) алгебраически, пользуясь артиновыми соотношениями для b_i.

Элементы Юциса-Мэрфи порождают абелеву подгруппу $\langle\{J_i\}_{i=1..n}\rangle \subset B_n$. Она бесконечна.

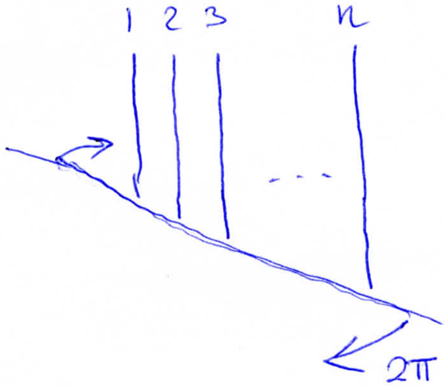
Центр группы кос $Z[B_n]$ лежит в ней:

<u>Утверждение 1</u>: Центр группы кос B_n, $n>2$, порождается элементом

$$\boxed{Z_n = J_1 J_2 \cdot \ldots \cdot J_n} : \quad \boxed{Z[B_n] = \langle Z_n \rangle} \qquad (3)$$

/ Wei-Liang Chow, 1948 /

Графически коса Z_n получается, если в незаплетенной косе нижние концы нитей дружно повернуть вокруг вертикали на 360° про часовой стрелке:



Графически очевидно, что $Z_n \in \mathbb{Z}[B_n]$

Упражнение 2:

а) проверьте алгебраически, что $b_i Z_n = Z_n b_i$ $\forall i = 1..n-1$

т.е., что $Z_n \in \mathbb{Z}[B_n]$

б) проверьте соотношения

$$\boxed{Z_n = X_n^2 = (C_n)^n},$$

где $C_n := b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ — n-цикл

$X_n := b_1 (b_2 b_1)(b_3 b_2 b_1) \ldots (b_{n-1} \ldots b_2 b_1)$ — поворот нижней части расплетенной косы на угол $180°$.

Упражнение* 3*

а) определите в терминах генераторов и соотношений группу кос на $\mathbb{R}^2$ с выколотой точкой: $\pi_1(B_n[\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}])$

б) Определите в этой группе аналог набора элементов Юциса – Мэрфи.

§2 Напоминание о симметрической группе S_n

Симметрическая группа S_n – конечная фактор-группа B_n. Задаётся в терминах генераторов σ_i, $i=1,\dots n$ — элементарных перестановок $(i,i+1)$, и соотношений:

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i, & \forall |i-j|>1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & \\ \sigma_i^2=1 & \end{cases} \qquad (4)$$

Порядок группы: $\# S_n = n!$, он же – размерность её групповой алгебры $\dim \mathbb{C}[S_n] = n!$

Всякий элемент $x\in S_n$ (то есть, всякий элемент линейного базиса в $\mathbb{C}[S_n]$) можно представить в виде композиции циклов

$$c_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_i =$$

$$(c_{ii}=1)$$

$$x = c_{i_1 1}\, c_{i_2 2}\, c_{i_3 3}\dots c_{i_n n}, \text{ где}$$

$$i_k\in\{1,2,\dots,k\}$$

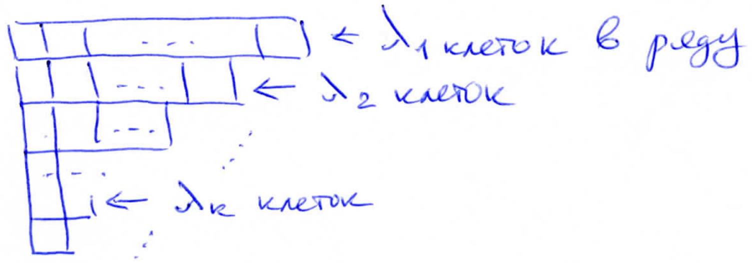
Таких элементов ровно $n!$ штук.

По теореме Машке всякое представление S_n над полем F, характеристика которого не делит порядок группы (в частности, над $\mathbb{C}$) разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Иными словами, групповая алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ полупроста. Поэтому для полного описания представлений S_n достаточно классифицировать ее неприводимые представления. Напомним эту классификацию:

Неприводимые представления S_n индексируются разбиениями числа n: $\lambda \vdash n$.

$$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\} : \sum_k \lambda_k = n, \quad \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0$$
$$\lambda_i \in \mathbb{Z}$$

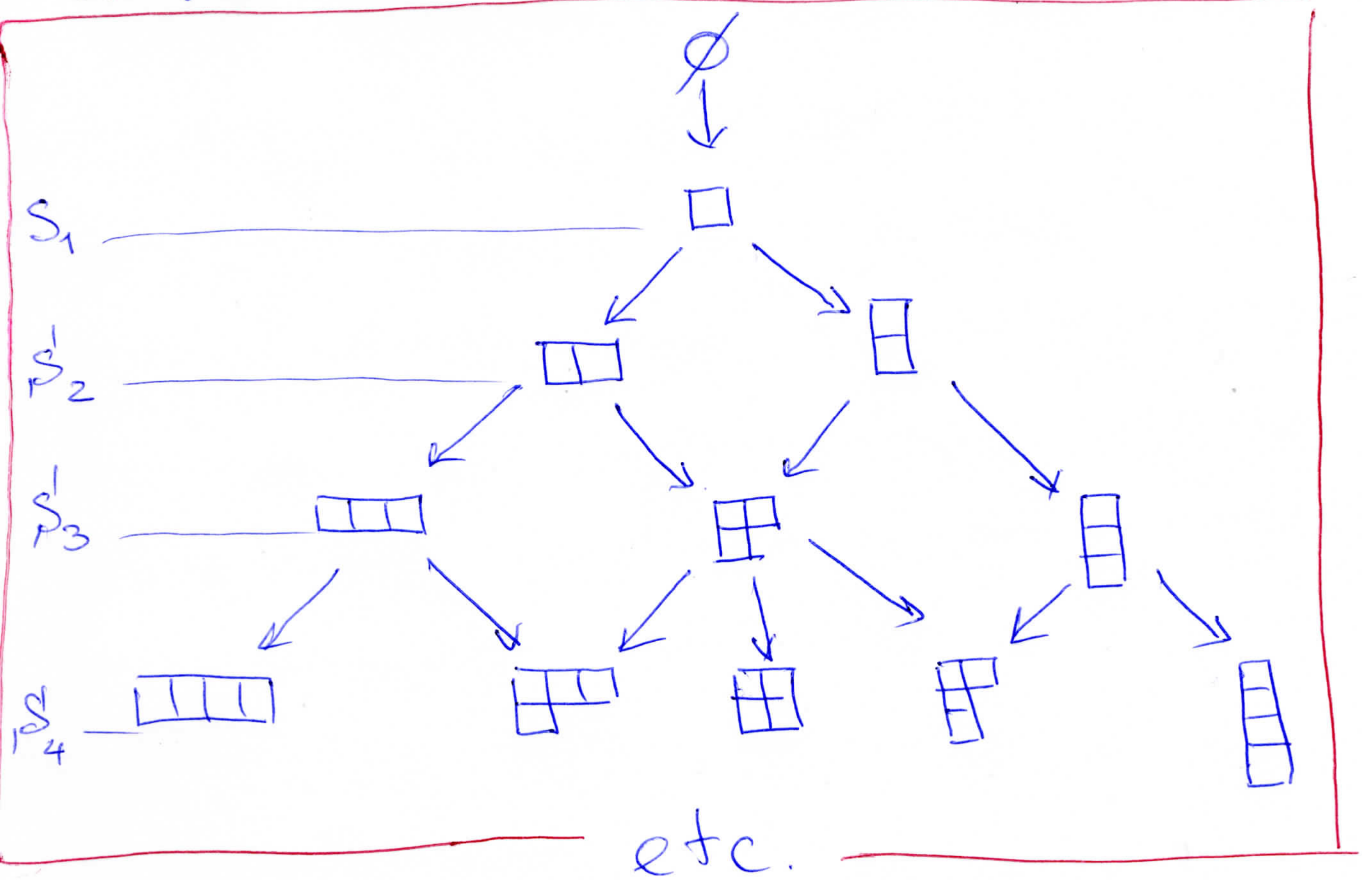
которые удобно рисовать в виде диаграмм Юнга:

$\lambda =$ 

V_λ — обозначение для неприводимого представления S_n, отвечающего разбиению $\lambda \vdash n$.

Взаимосвязь неприводимых представлений групп

S_n (для разных n) описывается, так называемой, диаграммой Браттели (он же, граф ветвления):



(5)

Этот граф — набор вершин, нумеруемых разбиениями λ и ориентированных рёбер между ними. В графе имеются горизонтальные уровни, нумеруемые сверху-вниз: 0-й, 1-й, 2-й ... На k-ом уровне расположены вершины с k-клеточными диаграммами Юнга ($\lambda \vdash k$). Эти вершины соответствуют всем неприводимым представлениям V_λ, $\lambda \vdash k$ группы S_k.

Рёбра графа ведут с уровня k на уровень $(k+1)$. Если пара вершин графа, скажем, $\lambda \vdash k$ и $\mu \vdash k+1$, соединены ребром, то представление V_μ группы S_{k+1} содержит в себе представление V_λ подгруппы $S_k \subset S_{k+1}$. (считаем, что подгруппа S_k порождена первыми $(k-1)$ генераторами σ_i, $i=1 \dots k-1$, группы S_{k+1}, т.е. всеми, за исключением σ_k). Наоборот, в представлении S_{k+1} индуцированном с представления V_λ ее подгруппы $S_k = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1} \rangle$, содержится в качестве неприводимой компоненты V_μ.

Размерность неприводимого представления V_λ, $\lambda \vdash n$, группы S_n совпадает с числом различных путей, ведущих в графе ветвления из вершины $\varnothing$ в вершину λ. Каждый такой путь описывается стандартной таблицей Юнга t_λ — то есть диаграммой Юнга, в клетках которой размещены числа $1, 2, \dots, n$ (каждое по 1-му разу), причем эти числа возрастают по горизонтали и вертикали при удалении от верхнего левого угла диаграммы

<u>Пример:</u>

$\lambda \vdash 4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$, $t_{\lambda(1)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$, $t_{\lambda(2)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$,

$t_{\lambda(3)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$.

$\dim V_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}} = 3$

Соответсвие между путями на графе ветвления и стандартными таблицами Юнга опишем на примере:

$$\varnothing \to \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Из примера становится ясным правило построения графа ветвления для S_n: две диаграммы $\lambda \vdash k$ и $\mu \vdash k+1$ графа соединены ребром тогда и только тогда, когда μ <u>получается</u> из λ добавлением одной клетки.

Например $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \end{array}$ ребром не соединены,

а $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \end{array}$ соединены.

Число стандартных таблиц Юнга, отвечающих данной диаграмме $\lambda \vdash n$, оно же — размерность неприводимого представления V_λ удобно вычислять по <u>формуле крюков</u> (hook length formula)

$$\boxed{d_\lambda = \dim \underset{(\lambda\vdash n)}{V_\lambda} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} h_{\lambda,i}}} \qquad (6)$$

где $h_{\lambda,i}$ — длины крюков, проведенных из всех клеток диаграммы λ (нумеруются индексом $i=1,2..n$)

<u>Пример:</u> $\lambda =$ 

$\lambda \vdash 11$

$h_{\lambda,1} = 8$ — длина крюка, построенного с вершиной в клетке 1 — число заметаемых им клеток диаграммы λ. (см. рис.)

$h_{\lambda,7} = 3$ (см. рис)

$$\dim V_\lambda = \frac{11!}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 7}{2} = 3465$$

Граф ветвления S_n удобно иллюстрирует <u>теорему Веддерберна-Артина</u> (Wedderburn-Artin) о полупростых алгебрах, которая в приложении к S_n (т.е. к $\mathbb{C}[S_n]$) приводит к:

$$\boxed{\dim \mathbb{C}[S_n] = n! = \sum_{\lambda\vdash n} (\dim V_\lambda)^2} \qquad (7)$$

<u>Пример</u>: $4! = 2^2+3^2+3^2+1^2+1^2$ — см. 4-ю строку графа ветвления.

§3 Алгебры Ивахори – Гекке

Алгебра Ивахори – Гекке (Iwahori – Hecke) – это фактор-алгебра $\mathbb{C}[B_n]$ по двустороннему идеалу, порожденному соотношением

$$\boxed{\Gamma_1 := b_1^2 - (q - q^{-1}) b_1 - 1 = 0,}$$

где $q \in \mathbb{C}^\times$ – параметр алгебры.

Алгебра эта обозначается $H_n(q)$. Её элементы $x_{\Gamma_1} \in H_n(q)$ – это классы элементов в $\mathbb{C}[B_n]$ вида

$$H_n(q) \ni x_\Gamma \longleftrightarrow x + \mathbb{C}[B_n]\,\Gamma_1\,\mathbb{C}[B_n] \in \mathbb{C}[B_n].$$

Вместо Γ_1 для ее определения можно взять $\forall\ \Gamma_i := b_i^2 - (q - \frac{1}{q}) b_i - 1$. Дело в том, что все элементы b_i сопряжены между собой в группе кос (проверьте это).

В терминах генераторов и соотношений $H_n(q)$ задается как алгебра, порождаемая g_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$ удовлетворяющими соотношениям:

$$\left|\begin{aligned} & g_i g_j = g_j g_i \quad \forall\ |i-j| > 1, \\ & g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ & g_i^2 = 1 + (q - \tfrac{1}{q}) g_i \end{aligned}\right. \qquad (8)$$

Очевидно, g_i соответствует классу элементарного заплетения:

$$g_i = (b_i)_\Gamma$$

Алгебры Ивахори-Гекке называют также алгебрами Гекке серии A_n, или просто алгебрами Гекке (это если не возникает путаницы с другими сериями алгебр Гекке).

Следующие факты об алгебрах Гекке мы примем без доказательства

1. $\dim H_n(q) = n!$,

Линейный базис в $H_n(q)$ можно выбрать по аналогии с S_n:

$$\boxed{x_{i_1, i_2 \dots i_n} = c_{i_1 1} c_{i_2, 2} \dots c_{i_n n}, \text{ где } i_k \in \{1, 2, \dots k\}}$$

и $c_{ij} := g_{j-1} g_{j-2} \dots g_i \quad (c_{ii} := 1)$

Rem: Можно убедиться, что $\forall x \in H_n(q)$ можно представить в виде линейной комбинации $x_{i_1, i_2 \dots i_n}$.

Упражнение 4: докажите это ↑. Подсказка: проверьте сначала, что $\forall x \in H_n(q)$ есть линейная комбинация элементов вида

$y = H_{n-1}(q)\, g_{n-1}\, H_{n-1}(q)$ и $z \in H_{n-1}(q)$, где

$$H_{n-1}(q) = \langle g_1, g_2, \dots g_{n-2} \rangle \subset H_n(q)$$

---

2 $\mathbb{C}[S_n] \equiv H_n(1) \equiv H_n(-1)$ (очевидно)

$\boxed{\mathbb{C}[S_n] \cong H_n(q)}$ при всех значениях $q \in \mathbb{C}^{\times}$, за исключением q: $[i]_q := \dfrac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}} = 0$, где $i = 2, 3, \dots, n$.

условия α

Если для q выполнено одно из условий α, то $H_n(q)$ не полупроста.

---

3 Элементы Юциса-Мэрфи ~~порождают~~

$$J_1 = 1,\quad J_2 = g_1^2,\quad J_3 = g_2 g_1^2 g_2, \dots\quad J_{i+1} = g_i J_i g_i$$

$i = 1 \dots n-1$

образуют максимальную коммутативную подалгебру в алгебре Гекке $H_n(q)$.

Всякое неприводимое представление алгебры $H_n(q)$ в пространстве V есть эпиморфизм

$$H_n(q) \longrightarrow \mathrm{End}(V),$$

то есть отображение $H_n(q)$ на алгебру матриц размера $\dim V \times \dim V$. При этом ~~образ~~ максимальная коммутативная подалгебра $\mathrm{End}(V)$ является образом подалгебры, порождаемой элементами Юциса-Мэрфи. Как известно, любая ~~каждая~~ максимальная коммутативная подалгебра в $\mathrm{End}(V)$ подобна подалгебре диагональных матриц, то есть подходящим выбором базиса в V может быть к ней сведена.

Таким образом, в любом неприводимом представлении V алгебры $H_n(q)$ можно выбрать базис, в котором все элементы J_i, $i=1\dots n-1$, действуют диагонально. При этом набор собственных значений a_i элементов J_i однозначно (с точностью до умножения на число) характеризует каждый элемент ~~базиса~~ базиса v_α, $\alpha=\{a_1,a_2\dots a_n\}$

$$\boxed{J_i v_\alpha = a_i v_\alpha}$$

Иначе $\langle J_1, J_2, \dots, J_n\rangle$ не была бы максимальной коммутативной подалгеброй в $H_n(q)$.

4 Очевидно, центр алгебры $H_n(q)$ лежит в любой ее максимальной коммутативной

подалгебре. В частности,

$$\boxed{Z[H_n(q)] \subset \langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle}$$

Оказывается центр $H_n(q)$ является подалгеброй <u>симметрических многочленов</u> от $J_1, J_2, \dots J_n$.

Следовательно, в любом неприводимом представлении $H_n(q)$ симметрические многочлены собственных значений a_i элементов J_i постоянны на всех элементах <u>базиса $\{v_\alpha\}$</u>. /по лемме Шура/

Мы проверим утверждение о центре $H_n(q)$ в одном направлении, а именно: $Symm(J_1, J_2, \dots J_n) \subset Z[H_n(q)]$

Для этого достаточно проверить, что

а) $[g_i, J_k] = 0$ если $i \neq k, k+1$

б) $[g_i, J_i J_{i+1}] = 0$

в) $[g_i, (J_i + J_{i+1})] = 0$

<u>Упражнение 5</u>: докажите а), б), в), воспользовавшись соотношениями (8).

<u>Упражнение 6</u>: Убедитесь, что элементы $\frac{J_i - 1}{q - 1/q} = y_i$, $i = 1, 2, \dots n$ образуют в пределе $q \to 1$ нетривиальный набор коммутирующих элементов в $\mathbb{C}[S_n]$. Получите явные формулы для y_i / Это коммутативный набор в $\mathbb{C}[S_n]$, предложенный Юцисом и Мэрфи

§ 4 Неприводимые представления $H_n(q)$.

I. Спектр элементов Юциса-Мэрфи.

В этом и следующем параграфах мы установим соответствие между неприводимыми представлениями алгебр Гекке $H_n(q)$ и диаграммами Юнга $\lambda \vdash n$, а также между базисами в этих представлениях и стандартными таблицами Юнга. Это естественно ожидать, т.к. $H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n]$.

С этой целью займемся изучением спектра элементов Юциса-Мэрфи в неприводимом представлении V. Мы выбираем базис $\{v_\alpha\}$ в V, где $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — собственные значения J_i на v_α:

$$\boxed{J_i v_\alpha = a_i v_\alpha} \qquad (9)$$

Теорема 1 Пусть v_α — вектор в неприводимом представлении V $H_n(q)$, собственный для всех J_i — см. (9), причем $\alpha = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$. Тогда:

(а) $a_i \neq a_{i+1}$

(б) если $a_i \neq q^{\pm 2} a_{i+1}$, то $\exists\, v_{\alpha'} \in V$ — собственный вектор для всех J_i с набором собственных значений

$$\alpha' = \{a_1, a_2, \dots a_{i+1}, a_i, a_{i+2} \dots, a_n\} = \sigma_i \circ \alpha$$

$\uparrow$ i-е место

в) если $a_{i+1} = q^{\pm 2} a_i$, то в представлении V нет вектора $v_{\alpha'}$, $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$, причём

$$\boxed{a_{i+1} = q^{\pm 2} a_i \Rightarrow g_i v_\alpha = \pm q^{\pm 1} v_\alpha} \quad (10)$$

Доказательство:

а) Предположим, что $a_i = a_{i+1} = a$ для некоторого i. Проследим за действием элементов g_i, J_i, J_{i+1} в V. Они образуют подалгебру в $H_n(q)$ с соотношениями

$$\boxed{\begin{aligned} &g_i^2 = 1 + (q - \tfrac{1}{q}) g_i \\ &J_{i+1} = g_i J_i g_i \\ &J_i J_{i+1} = J_{i+1} J_i \end{aligned}} \quad (11)$$

Имеем: $J_i v_\alpha = J_{i+1} v_\alpha = a v_\alpha$.

Из равенства $g_i J_i v_\alpha = J_{i+1} g_i^{-1} v_\alpha = J_{i+1}(g_i - (q - \frac{1}{q})) v_\alpha$

заключаем: $(J_{i+1} - a)(g_i v_\alpha) = (q - \frac{1}{q}) a v_\alpha$ $\quad (*)$

Вектор $g_i v_\alpha \in V$ можно разложить по базису $\{v_\beta\}$ собственных векторов элементов Юциса-Мэрфи. Тогда в левой части $(*)$ будет отсутствовать вектор v_α (т.к. $J_{i+1} v_\alpha = a v_\alpha$

$\Rightarrow$ Получили противоречие $\boxtimes$

б) Проверим как J_i и J_{i+1} действуют на вектор

$$\boxed{\omega = \left(g_i + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right) v_\alpha} \quad (12)$$

напомним $\lambda = q - 1/q$

$$J_i \omega = g_i^{-1} J_{i+1} v_\alpha + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} J_i v_\alpha =$$

$$= a_{i+1}(g_i - \lambda 1) v_\alpha + \lambda \frac{a_i a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} v_\alpha =$$

$$= a_{i+1}\left(g_i + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right) v_\alpha = a_{i+1}\omega$$

Аналогичная выкладка даёт $\boxed{J_{i+1}\omega = a_i \omega}$

Заметим, что при условии $a_i \neq q^{\pm 2} a_{i+1}$ оператор $\left(g_i + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right)$ обратим, а значит $\omega \neq 0$.

С учётом того, что $J_k \omega = a_k \omega$ (также как и для v_α) при всех $k \neq i, i+1$, заключаем, что

$$\boxed{\omega = v_{\alpha'} \quad \alpha' = \sigma_i \circ \alpha} \quad \boxtimes \quad (12a)$$

в) Для определенности рассмотрим случай $a_{i+1} = q^2 a_i$. Предположим, что вектор ω (12) нетривиален:

$$\omega = (g_i - q\cdot 1) v_\alpha \neq 0$$

Тогда $\omega = v_{\alpha'}$, причём

$$(g_i + \tfrac{1}{q}\cdot 1) v_{\alpha'} = 0$$

Получается, что v_α и $\omega = v_{\alpha'}$ связаны необратимым преобразованием, и от $v_{\alpha'}$ к v_α вернуться не получается. То есть $v_{\alpha'}$ порождает $H_n(q)$ – инвариантное подпространство в V, не содержащее v_α, что противоречит неприводимости V. ▨

Rem. Подчеркнутая фраза в завершении предыдущего доказательства требует строгого обоснования. Для этого нам потребуется

Лемма: Пусть V неприводимое представление $H_n(q)$, $\{v_\alpha\}$ – базис в V, диагонализующий элементы Юциса-Мэрфи. Пусть $\{\bar{v}_\alpha\} \subset \{v_\alpha\}$ – поднабор всех векторов из базиса $\{v_\alpha\}$, имеющих одинаковые собственные значения у операторов $J_{k+1}, J_{k+2}, \dots J_n$, $(k<n)$. Они имеют вид

$$\bar{v}_\alpha = (\underbrace{*, \dots, *}_{\substack{\text{переменная часть,}\\ \text{первые } k \text{ компонент}}}, \underbrace{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_n}_{\text{фиксировано}})$$

Тогда $\{\bar{v}_\alpha\}$ является базисом неприводимого представления $U = \mathrm{Span}\{\bar{v}_\alpha\}$ подалгебры $H_k(q) \subset H_n(q)$ порожденной генераторами $g_1, g_2, \dots g_{k-1}$.

Доказательство: Докажем утверждение для $k = n-1$.

Далее его можно распространять на $k < n-1$ по индукции.

Доказательство проведем от противного: пусть имеется набор векторов $\{\overline{v}_\alpha\}$ с одинаковыми n-ыми компонентами $a_n = A$, таких что $V = \mathrm{Span}\{\overline{v}_\alpha\}$ — приводимое представление $H_{n-1}(q)$. Пусть $V' \subset V$, $V' \neq V$ — неприводимое представление $H_{n-1}(q)$ с базисом $\{\overline{\overline{v}}_\alpha\}$.

Очевидно, $\{\overline{\overline{v}}_\alpha\} \subset \{\overline{v}_\alpha\}$, причем $\{\overline{v}_\alpha\} \setminus \{\overline{\overline{v}}_\alpha\} \neq \emptyset$.

Рассмотрим представление $H_n(q)$, порождаемое с V': $H_n(q)\, V'$. Так как всякий элемент H_n, это либо элемент подалгебры H_{n-1}, либо элемент вида $H_{n-1} g_{n-1} H_{n-1}$ (см. подсказку к Упражнению 4 на стр 11–12), то

$$H_n V' = \mathrm{Span}\{H_{n-1} V', H_{n-1} g_{n-1} H_{n-1} V'\} =$$

$$= \mathrm{Span}\{V', H_{n-1} g_{n-1} V'\}$$

Заметим, что для $\forall\ \overline{\overline{v}}_\alpha \subset V'$ $g_{n-1} \overline{\overline{v}}_\alpha$ есть линейная комбинация $\overline{\overline{v}}_\alpha$ и $\overline{\overline{v}}_{\alpha'}$, $\alpha' = \sigma_{n-1} \circ \alpha$. При этом $\overline{\overline{v}}_{\alpha'} \notin V$, так как у него $a_n \neq A$ (a_{n-1} и a_n в $\overline{\overline{v}}_\alpha$ не могут совпадать). Ситуация не исправляется и если подействовать на результат H_{n-1}:

$$H_{n-1} g_{n-1} V' \cap V = V'$$

Следовательно $H_n V' \cap V = V'$, а значит $H_n V'$ не содержит некоторых векторов из V и не совпадает с V, что противоречит неприводимости V $\blacksquare$

Теперь докажем подчеркнутое утверждение со стр 18:

В силу Леммы вектор $v_{\alpha'}$ порождает неприводимое представление $H_{i+1}(q) \subset H_n(q)$.:

$$U = H_{i+1} v_{\alpha'} = \mathrm{Span}\{H_i v_{\alpha'}, H_i g_i H_i v_{\alpha'}\}$$

Вектор v_α имеет совпадающие с $v_{\alpha'}$ компоненты, начиная с a_{i+2}, поэтому должно быть $v_\alpha \in U$.

v_α имеет индекс $\alpha = (\dots a, q^2 a, \dots)$

$\uparrow i \quad \uparrow i+1$ места

$v_{\alpha'}$ имеет индекс $\alpha' = (\dots q^2 a, a, \dots)$

Поэтому $v_\alpha \notin H_i v_{\alpha'}$ ($i+1$-е компоненты различны)

$H_i v_{\alpha'}$ может содержать векторы вида $H_{i-1} v_{\alpha'}$ и векторы с индексом $\beta = (\dots, b, a, \dots)$,

$\uparrow i \quad \uparrow i+1$ – места

где $b \neq q^2 a$.

Но $g_i (H_{i-1} v_{\alpha'}) = H_{i-1} g_i v_{\alpha'} = -\frac{1}{q} H_{i-1} v_{\alpha'}$ – не порождает v_α

и $g_i v_\beta =$ лин. комбинация v_β и $v_{\sigma_i \circ \beta}$ – тоже не совпадают с v_α

Таким образом, $g_i H_i v_{\alpha'}$ не содержит v_α, так как на $(i+1)$-м месте у них разные компоненты

Следовательно, и $H_i g_i H_i v_{\alpha'} \not\ni v_\alpha$.

Получили $v_\alpha \notin U$ – противоречие, которое разрешается требованием $v_{\alpha'} = (g_i - q \cdot 1) v_\alpha = 0$. $\blacksquare$

Следствие 2 В условиях теоремы 1 для компонент индекса $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ верно:

$$\boxed{a_i \in \{q^{2k}, k \in \mathbb{Z}\}}$$

Док-во: Очевидно, $a_1 = 1$. В силу соотношения Гекке $a_2 = q^{\pm 2}$. Далее доказательство проводится индукцией от a_i к a_{i+1} с использованием пункта б) Теоремы 1.

Поупражняемся в вычислении возможных собственных значений операторов Юциса-Мэрфи, то есть индексов α:

Для $H_2(q)$ возможны:

$$\alpha_1 = (1, q^2), \quad \alpha_2 = (1, q^{-2})$$

Для $H_3(q)$ есть варианты

собств. значения J_1, J_2, J_3, соответственно

$$\begin{cases} \alpha_{1a} = (1, q^2, q^4) \\ \alpha_{1b} = \cancel{(1, q^2, q^2)} \leftarrow \text{запрещено пунктом а) теоремы 1.} \\ \alpha_{1c} = (1, q^2, 1) \\ \alpha_{1d} = (1, q^2, q^{-2}) \end{cases}$$

Это все, что можно состряпать из α_1 добавлением J_3.

Все остальные варианты $\alpha_{1*} = (1, q^2, q^{2K})$, где $K \neq -1, 0, 1, 2$

не реализуются, так как, в силу Теоремы 1б), их существование позволило бы построить $\alpha' = (q^{2K}, 1, q^2)$

Не реализуется также и случай α_{1c}, так как, по Теореме 1 в)

$$g_1 v_{\alpha_{1c}} = q v_{\alpha_{1c}} \quad , \quad g_2 v_{\alpha_{1c}} = -\frac{1}{q} v_{\alpha_{1c}},$$

а значит

$$g_1 g_2 g_1 v_{\alpha_{1c}} \neq g_2 g_1 g_2 v_{\alpha_{1c}} \text{ — противоречие.}$$

Итак, получаем возможные конфигурации индексов α для $H_3(q)$:

$$\underline{H_2(q)} \qquad\qquad \underline{H_3(q)}$$

$$(1, q^2) \Longrightarrow \begin{cases} (1, q^2, q^4) \\ (1, q^2, q^{-2}) \end{cases}$$

аналогично:

$$(1, q^{-2}) \Longrightarrow \begin{cases} (1, q^{-2}, q^2) \\ (1, q^{-2}, q^{-4}) \end{cases}$$

У этих индексов совпали ~~[illegible]~~ наборы a_i, с точностью до их порядка. Поэтому симметрические функции от a_i для них совпадают

Возможно, что соответствующие этим индексам вектора принадлежат одному неприводимому представлению размерности 2. Подсчёт размерностей

$$3! = \dim H_3(q) = 2^2 + 1^2 + 1^2$$ подтверждает это предположение.

Упражнение 7: Убедитесь, что набор возможных индексов α для $H_4(q)$ имеет вид

$(1, q^2, q^4, q^6)$;

$(1, q^2, q^4, q^{-2})$, $(1, q^{-2}, q^2, q^4)$, $(1, q^2, q^{-2}, q^4)$;

$(1, q^2, q^{-2}, 1)$, $(1, q^{-2}, q^2, 1)$;

$(1, q^{-2}, q^{-4}, q^2)$, $(1, q^{-2}, q^2, q^{-4})$, $(1, q^2, q^{-2}, q^{-4})$;

$(1, q^{-2}, q^{-4}, q^{-6})$,

и таким образом, у $H_4(q)$ возможны неприводимые представления размерностей 1 – 2 штуки; 2; 3 – 2 штуки:

$$4! = 2^2 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 1^2$$

Сформулируем общее правило построения индексов α в $H_n(q)$:

Правило 3: $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ может быть индексом ~~собственно~~ вектора $v_\alpha(q)$ если:

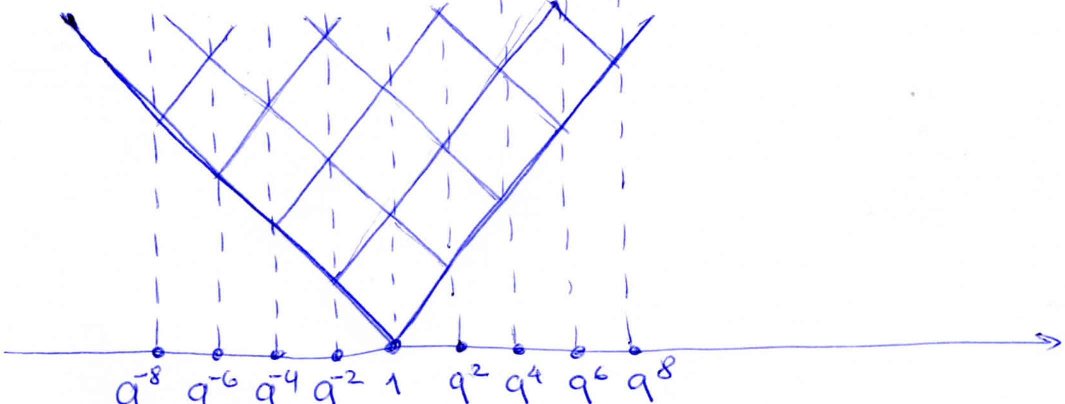
1) $a_1 = 1$
2) $\forall i \quad \{a_i q^2, a_i q^{-2}\} \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$
3) если для некоторой пары $i<j$ $a_i = a_j = a$, то $\exists\, k, l$: $i<k<j$, $i<l<j$, $a_k = q^2 a$, $a_l = q^{-2} a$.

Упражнение 8: Докажите правила 3, пользуясь теоремой 1 и проделанными затем упражнениями.

Эти правила соответствуют алгоритму построения стандартных таблиц Юнга. Действительно, сопоставим элементам Юциса-Мэрфи нумерованные клетки

$$\boxed{J_i \longleftrightarrow \boxed{i}}$$

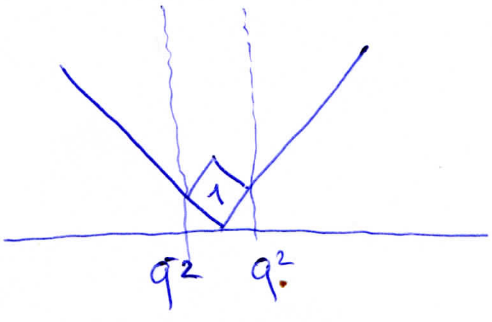
и будем их бросать в "яму" вида



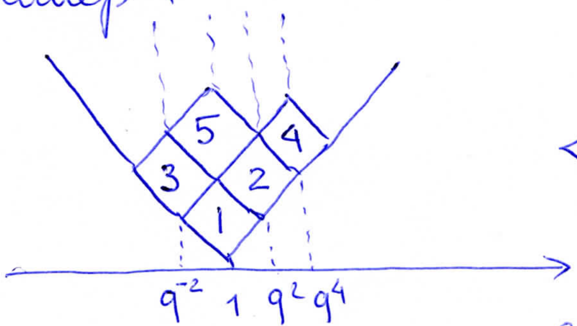
Клетки бросаем последовательно, начиная с $\boxed{1}$. Они опускаются в яму вдоль вертикальных линий с коодинатами $1, q^{\pm 2}, q^{\pm 4}, q^{\pm 6}, \ldots$

Первая клетка $\boxed{1}$ может опуститься только вдоль линии с координатой 1 так, чтобы попасть в минимум ямы.

Вторая клетка $\boxed{2}$ должна попасть в один из образовавшихся минимумов, то есть вдоль линий q^2 или q^{-2}:



И так далее: каждая следующая клетка должна попадать в локальный минимум образовавшейся уже конфигурации. Получившиеся таким образом конфигурации клеток представляют из себя стандартные таблицы Юнга. Например:

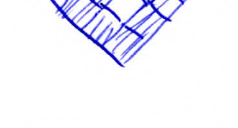
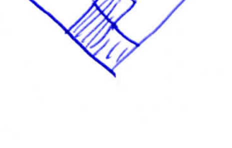


$\Longleftrightarrow$ Станд. таблица Юнга

1	2	4
3	5	

Координата вертикальной линии, вдоль которой падала клетка $\langle i \rangle$ называется "контентом" (содержанием) клетки $\langle i \rangle$. Она соответствует собственному значению a_i оператора Юциса-Мэрфи J_i. Например, нарисованной выше конфигурации клеток соответствует индекс $\alpha = \{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}$.

Заметим, что пункт 2) правила 3 предотвращает образование несвязных кластеров в яме: ,

а пункт 3) правила 3 исключает появление кластеров с дырками:  и впадинами: 

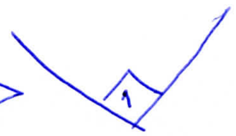
Таким образом, мы установили <u>взаимно-однозначное соответствие</u> между правилами построения индексов α векторов v_α в неприводимых представлениях $H_n(q)$ и стандартными таблицами Юнга

кодирует индекс α

$$\boxed{v_\alpha \longleftrightarrow \text{стандартная таблица } t_\lambda,\ \lambda \vdash n}$$

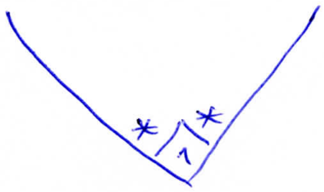
причем одному неприводимому представлению могут принадлежать лишь векторы, чьи стандартные таблицы отвечают одной и той же диаграмме Юнга.

Правила построения индексов α дают нам и удобный способ построения <u>характеристических тождеств</u> в подалгебре элементов Юциса-Мэрфи. Действительно, в $H_n(q)$ (в отличие от $\mathbb{C}[B_n]$) подалгебра, порожденная элементами J_i должна быть конечномерной, а значит существуют полиномиальные тождества на J_i. Мы их построим, действуя индукцией по n:

В $H_1(q)$: $\boxed{J_1 - 1 = 0}$ — тривиально $\Longleftrightarrow$ 

В $H_2(q)$: $\boxed{(J_2-q^2)(J_2-q^{-2}) = 0}$ — условие Гекке (13)

Его можно интерпретировать графически как возможность положить клетку 2 в одно из двух мест:



с контентами q^2 и q^{-2}.

Прежде, чем перейти к рассмотрению $H_3(q)$ обратим внимание, что соотношение (13) позволяет нам построить разложение единицы алгебры $H_2(q)$ в сумму взаимно-ортогональных идемпотентов (проекторов) / пирсовское разложение единицы/:

$$P_{\boxed{2}\boxed{1}\times} = \frac{J_2 - q^2}{q^{-2} - q^2}$$

контент помеченной "x" клетки, куда не попала $\boxed{2}$

контент клетки, куда попала $\boxed{2}$

$$P_{\times\boxed{1}\boxed{2}} = \frac{J_2 - q^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \qquad (14)$$

$$\boxed{\begin{gathered} P_{\boxed{2}\boxed{1}} P_{\boxed{1}\boxed{2}} = 0, \quad P^2_{\boxed{2}\boxed{1}} = P_{\boxed{2}\boxed{1}}, \quad P^2_{\boxed{1}\boxed{2}} = P_{\boxed{1}\boxed{2}} \\ P_{\boxed{2}\boxed{1}} + P_{\boxed{1}\boxed{2}} = 1 \end{gathered}}$$

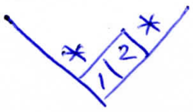
Обратим внимание, что мы не при всяких значениях q можем нормировать проекторы $P_{\square\!\square}$ и $P_{\square\!\square}$. Требуется $q^2 \neq q^{-2}$, или $[2]_q = q + q^{-1} \neq 0$ (если исключить случаи $q = \pm 1$, отвечающие симм. группе S_n)

Так появляются условия полупростоты. При $[2]_q = 0$

проекторы $P_{\boxed{}\boxed{}}$, $P_{\boxed{}\boxed{}}$ ненормируемы, построить пирсовское разложение единицы в $H_2(q)$ не удаётся, и $H_2(q)$ <u>не полупроста</u>.

Перейдём к $H_3(q)$. Характеристические тождества строятся так:


$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} P_{\boxed{2}\boxed{1}} \cdot (J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) \equiv 0 \\ \text{или} \quad (J_2 - q^2)(J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) \equiv 0 \end{array}} \qquad (15а)$$


$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} P_{\boxed{1}\boxed{2}} (J_3 - q^4)(J_3 - q^{-2}) \equiv 0 \\ \text{или} \quad (J_2 - q^{-2})(J_3 - q^{-2})(J_3 - q^4) \equiv 0 \end{array}} \qquad (15б)$$

Возникло 2 новых тождества, по одному для каждого проектора из $H_2(q)$. Они порождают новые проекторы:

$$\begin{cases} P_{\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\,\times} = P_{\boxed{2}\boxed{1}} \cdot \dfrac{J_3 - q^2}{q^{-4} - q^2} \\[2ex] P_{\times\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}} = P_{\boxed{2}\boxed{1}} \cdot \dfrac{(J_3 - q^{-4})}{q^2 - q^{-4}} \end{cases}$$

контент, помеченной "x" клетки, куда могла встать, но не встала ~~клетка~~ $\boxed{3}$

контент клетки, куда встала $\boxed{3}$

эти 2 идемпотента происходят из тождества (15а)

$$P_{\boxed{1|2|3}^{\,*}} = P_{\boxed{1|2}} \cdot \frac{J_3 - q^{-2}}{q^4 - q^{-2}}$$

$$P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}^{\,*}} = P_{\boxed{1|2}} \cdot \frac{J_3 - q^{4}}{q^{-2} - q^{4}}$$

— эти идемпотенты строятся по тождеству (15б)

Свойства построенных идемпотентов:

*) $P_{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}$; $P_{\begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}}$

**) $$P_t \cdot P_s = \delta_{t,s} P_t ,$$

где $t, s \in \left\{ \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix} \right\}$

$\Downarrow$

Четверка построенных идемпотентов дает пирсовское разложение единицы в алгебре $H_3(q)$

<u>Упражнение 9</u> Для каждого из идемпотентов в $H_3(q)$ постройте тождество для элементов Юциса-Мэрфи в $H_4(q)$. По этим тождествам постройте пирсовское разложение единицы в $H_4(q)$

В конце концов для $H_n(q)$ мы получаем взаимно-однозначные сопоставления

$$\boxed{v_\alpha \longleftrightarrow \underset{\text{кодирует индекс } \alpha}{\overset{\text{стандартная таблица}}{t_\lambda}},\ \lambda \vdash n \Longleftrightarrow \overset{\text{идемпотент}}{P_{t_\lambda} \in H_n(q)}}$$

причем, если $\alpha = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$, то есть

$$J_i v_\alpha = a_i v_\alpha ,$$

то

$$J_i P_{t_\lambda} = P_{t_\lambda} J_i = a_i P_{t_\lambda}$$

откуда следует, что идемпотент P_{t_λ} является проектором на вектор v_α в любом неприводимом представлении V:

$$P_{t_\lambda} V = \mathbb{C} v_\alpha , \text{ если } v_\alpha \in V$$
$$P_{t_\lambda} V = 0 , \text{ если } v_\alpha \notin V$$

При этом в одном и том же пространстве V нетривиально могут действовать лишь проекторы, отвечающие одной и той же диаграмме Юнга.

Идемпотенты P_{t_λ} ортонормированы и примитивны (поскольку проецируют на одномерные подпространства). Они задают пирсовское разложение ~~...~~ единицы в $H_n(q)$: $\sum\limits_{t_\lambda, \lambda\vdash n} P_{t_\lambda} = 1$.

Rem: при построении идемпотентов P_{t_λ} приходится исключать значения q, при которых в знаменателях идемпотентов появляются нули (т.е. совпадающие корни в характеристических ~~...~~ тождествах для J_i). Это как раз условия полупростоты алгебры $H_n(q)$.

Например, при рассмотрении идемпотентов в $H_3(q)$ нам, помимо $[2]_q \neq 0$ (требуется уже в $H_2(q)$) потребовалось $q^4 - q^{-2} \neq 0$, т.е. $[3]_q \neq 0$.

Rem. Полупростые алгебры, над полем $\mathbb{C}$, изоморфны прямым ~~суммам~~ произведениям матричных алгебр, т.е. алгебрам блочно-диагональных матриц. При этом построенные нами идемпотенты можно считать прообразами диагональных матричных единиц: матриц с единственным ненулевым элементом — единицей где-то на ее диагонали.

Пример: Наша конструкция предполагает изоморфизм $H_3(q)$ с алгеброй 4×4 матриц с двумя 1×1 диагональными блоками и одним 2×2 блоком

$$H_3(q) \simeq \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Построенные нами 4 идемпотента при этом изоморфизме соответствуют четырем диагональным матричным единицам с единицами на отмеченных "$*$" местах. Два идемпотента

P  и P  располагаются в одном 2×2 блоке.

§ 5 Неприводимые представления $H_n(q)$

II. Недиагональные матричные единицы

Мы построили серию идемпотентов в $H_n(q)$ —
P_α — аналогов <u>диагональных</u> матричных единиц.
Попробуем построить целиком изоморфизм $H_n(q)$
в прямое произведение матричных алгебр, т.е.
найти формулы и для <u>недиагональных</u> матричных
единиц. Для этого изучим свойства оператора
$\left(g_i + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right)$, отображающего $v_\alpha \to v_\alpha$ /см. (12)/
Переобозначим $a_{i+1}/a_i = q^{2x}$ (естественно, т.к. $a_i \in \{q^{2\mathbb{Z}}\}$)
и назовём

$$\boxed{g_i(x) := \left(g_i - \frac{q^x}{[x]_q} 1\right)} \qquad (16)$$

<u>бахтеризованным элементом g_i</u>. Нам потребуется
чтобы параметр x, зачастую называемый <u>спектраль-</u>
<u>ным</u>, принимал значения в $\mathbb{Z}$. Однако, в прило-
жениях бывает $x \in \mathbb{C}$. Название "спектральный"
для x происходит из приложений.

Свойства бахтеризованных элементов:

<u>Лемма 4</u>: Для генераторов g_i алгебры Гекке $H_n(q)$
имеем:

a) $$\boxed{g_i(x)\, g_i(-x) = \frac{[x+1]_q [x-1]_q}{([x]_q)^2} 1} \qquad (17a)$$

б) $$\boxed{\begin{aligned} g_i(x)\, g_{i+1}(x+y)\, g_i(y) &= \\ &= g_{i+1}(y)\, g_i(x+y)\, g_{i+1}(x) \end{aligned}} \quad (17б)$$

Последнее соотношение называется уравнением Янга–Бакстера.

Упражнение 10. Докажите (17а) и (17б), воспользовавшись соотношениями для генераторов g_i (8).

Мы знаем как $g_i(x)$ действует на $v_\alpha, v_{\alpha'}$:

$$g_i(x)\, v_\alpha = \begin{cases} v_{\alpha'}, & \text{где } q^{2x} := \dfrac{a_{i+1}}{a_i},\ \alpha' = \sigma_i \circ \alpha \\ & x \neq \pm 1; \\ 0, & \text{если } x = \pm 1 \end{cases} \qquad /\text{Теорема 1}/$$

$$g_i(-x)\, v_{\alpha'} = \frac{[x+1]_q [x-1]_q}{([x]_q)^2}\, v_\alpha \qquad /\text{лемма 4а}/$$

и как P_α и $P_{\alpha'}$ действуют на $v_\alpha, v_{\alpha'}$:

$$\begin{aligned} P_\alpha v_\alpha &= v_\alpha \\ P_\alpha v_{\alpha'} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_{\alpha'} v_\alpha &= 0 \\ P_{\alpha'} v_{\alpha'} &= v_{\alpha'} \end{aligned}$$

впрочем, это верно и для $\forall\, v_\beta,\ \beta \neq \alpha$

Проследим за их совместным действием:

$$[\,g_i(x)\,P_\alpha\,]\,v_\alpha = v_{\alpha'}$$

$$[\,g_i(x)\,P_\alpha\,]\,v_{\alpha'} = 0 \quad (\text{это верно и для } \forall v_\beta,\ \beta\neq\alpha)$$

Это и есть действие недиагональной матричной единицы! Впрочем, имеем ещё одного кандидата:

$$[P_{\alpha'}\,g_i(-x)]\,v_\alpha = P_{\alpha'}\left(g_i(x) + \left(\frac{q^x}{[x]_q} + \frac{q^{-x}}{[x]_q}\right)1\right)v_\alpha =$$

$$= P_{\alpha'}\left(v_{\alpha'} + \frac{q^x+q^{-x}}{[x]_q}\,v_\alpha\right) = v_{\alpha'}$$

$$[P_{\alpha'}\,g_i(-x)]\,v_{\alpha'} = P_{\alpha'}\,\frac{[x+1]_q[x-1]_q}{([x]_q)^2}\,v_\alpha = 0$$

(это верно и для $\forall v_\beta$, $\beta\neq\alpha$)

Поскольку оператор $E_{\alpha'\alpha}$ со свойствами

$$E_{\alpha'\alpha}\,v_\beta = \delta_{\alpha\beta}\,v_{\alpha'}$$

(недиагональная матричная единица) в любом ~~неприв~~ представлении определен однозначно, мы получаем

Теорема 5: Для $\forall$ пары идемпотентов P_α и $P_{\alpha'}$ в $H_n(q)$, таких что $\alpha' = \sigma_i\circ\alpha$

$$x\neq\pm1\qquad \boxed{\begin{aligned} g_i(x)\,P_\alpha &= P_{\alpha'}\,g_i(-x) \\ P_\alpha\,g_i(x) &= g_i(-x)\,P_{\alpha'} \end{aligned}} \qquad (18a)$$

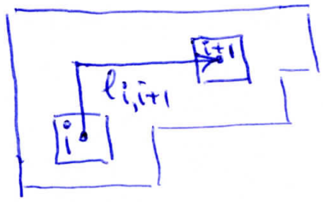
,

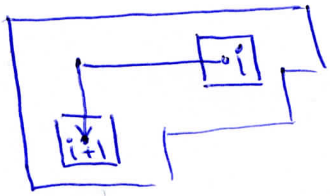
где $q^{2x} = \dfrac{a_{i+1}}{a_i}$ $/\ \alpha = (\ldots a_i, a_{i+1}\ldots a_n)/$.

Если $x=\pm 1$: $$\boxed{g_i(x)P_\alpha = P_\alpha g_i(x) = 0} \qquad (18b)$$

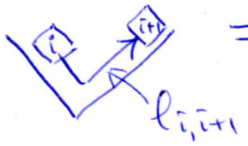
Таким образом мы построили прообразы недиагональных матричных единиц $E_{\alpha\alpha'}$, $E_{\alpha'\alpha}$*, $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$ в алгебре Гекке (с точностью до их нормировки).

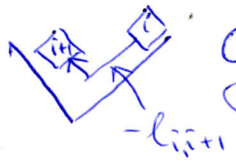
Параметр x в формулах (18) имеет наглядную графическую интерпретацию.

Если $\alpha \mapsto t_\alpha =$ 

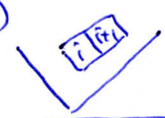
$\alpha' \longrightarrow t'_\alpha =$ 

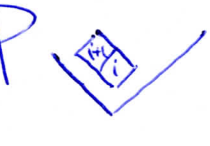
то x – это длина крюка $l_{i,i+1}$, проведенного из клетки $\boxed{i}$ в клетку $\boxed{i+1}$ (единицей длины считается размер клетки). Крюк ориентирован от $\boxed{i}$ к $\boxed{i+1}$. $l_{i,i+1}$ положительна/отрицательна, если крюк ориентирован верх-вправо/~~вниз~~ влево-вниз. Графическая запись (18):

$g_i(l_{i,i+1})\,P$ 

$= P$ 

$g_i(-l_{i,i+1})$

$g_i(1)\,P$ 

$= 0$, $g_i(-1)\,P$ 

, etc.

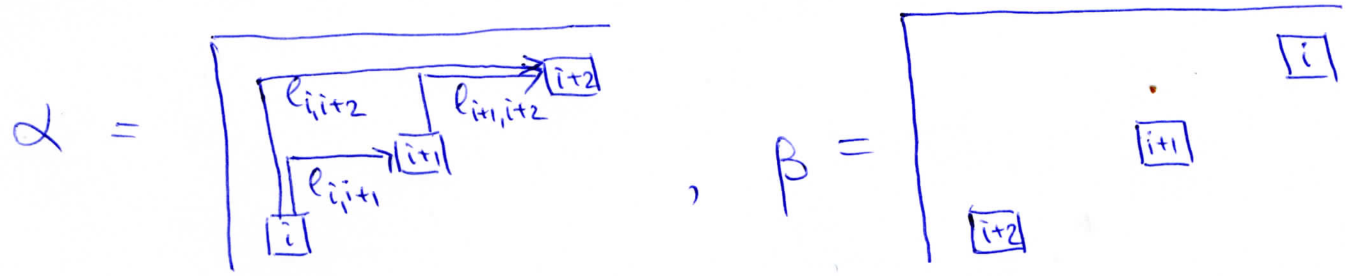
(18c)

Для построения недиагональных матричных единиц, отвечающих паре произвольных стандартных таблиц одинаковой формы λ, надо повторять процедуру перестановки клеток $\boxed{i}$, $\boxed{i+1}$ многократно. При этом, для совместности всей предлагаемой конструкции требуется, чтобы 2 способа построения недиагональной матричной единицы $E_{\alpha,\beta}$:

$$\alpha \to \beta = (\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i) \circ \alpha$$

$$\alpha \to \beta = (\sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}) \circ \alpha$$

давали идентичные ответы. Проверяем:



Первый способ перехода от α к β соответствует умножению P_α слева на

$$g_i(l_{i,i+1})\, g_{i+1}(l_{i,i+2})\, g_i(l_{i+1,i+2}).$$

Второй способ — умножению P_α слева на

$$g_{i+1}(l_{i+1,i+2})\, g_i(l_{i,i+2})\, g_{i+1}(l_{i,i+1}).$$

С учётом $l_{i,i+2} = l_{i,i+1} + l_{i+1,i+2}$, равенство этих двух множителей гарантируется уравнением Янга-Бакстера (17б).

На этом мы практически завершили конструкцию изоморфизма

$$\boxed{H_n(q) \cong \underset{\lambda \vdash n}{\times} Mat(d_\lambda, \mathbb{C})},$$

здесь d_λ – число стандартных таблиц формы λ, даваемое формулой крюков.

На самом деле мы имеем и явные формулы для действия генераторов g_i в любом неприводимом представлении V_λ.

В базисе $\{v_\alpha\}$ ~~матрица~~ матрица g_i имеет ~~бл~~ блочно-диагональный вид с 1×1 и 2×2 блоками.

<u>1×1 блоки</u>:

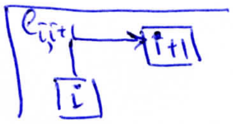
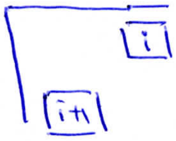
– Если $\alpha \Rightarrow \boxed{i \mid i+1}$, то $g_i(1)v_\alpha = 0$, то есть

$$\boxed{g_i v_\alpha = q v_\alpha}$$

– Если $\alpha \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline i \\ \hline i+1 \\ \hline\end{array}$, то $g_i(-1)v_\alpha = 0$, то есть

$$\boxed{g_i v_\alpha = -\frac{1}{q} v_\alpha}$$

2x2 блоки:

– Если $\alpha \to$  , $\alpha' \to$  , то

на паре базисных векторов $v_\alpha, v_{\alpha'}$ g_i действует матрицей:

$$\boxed{g_i = \begin{pmatrix} \dfrac{q^l}{[l]_q} & \dfrac{[l-1]_q[l+1]_q}{([l]_q)^2} \\ 1 & -\dfrac{q^{-l}}{[l]_q} \end{pmatrix}, \quad l \equiv l_{i,i+1}}$$

Действительно, проверяем:

$$g_i(l)\, v_\alpha = v_{\alpha'} \iff g_i v_\alpha = v_{\alpha'} + \frac{q^l}{[l]_q} v_\alpha$$

$$g_i(-l)\, v_{\alpha'} = \frac{[l+1]_q[l-1]_q}{([l]_q)^2} v_\alpha \iff g_i v_{\alpha'} = \frac{[l+1]_q[l-1]_q}{([l]_q)^2} v_\alpha - \frac{q^{-l}}{[l]_q} v_{\alpha'}$$

∎

Пример: В 2-мерном представлении $V_{\yng(2,1)}$ алгебры $H_3(q)$ в базисе $v_1 := v_{\young(12,3)}$, $v_2 := v_{\young(13,2)}$

$$g_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{q^{-2}}{[2]_q} & \dfrac{[3]_q}{[2]_q^2} \\ 1 & \dfrac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}$$

Упражнение 11. Постройте матрицы генераторов g_1, g_2, g_3 в представлении $V_{\yng(3,1)}$ алгебры $H_4(q)$