Лекция 2-19. До каких пор можно обобщать теорему Пифагора?

1 Линейные функционалы в L_2: ограниченность и непрерывность.

Определение 1 *Линейный функционал на подмножестве $C \subset L_2$ - это линейное отображение $l : C \to \mathbb{R}$.*

Определение 2 *Линейный функционал $l : C \to \mathbb{R}$ ограничен, если он ограничен на пересечении C с единичной сферой $S = \{f \in L_2 || ||f|| = 1\}$.*

Определение 3 *Если линейный функционал $l : C_2^0 \to \mathbb{R}$ ограничен, то он продолжается до непрерывного отображения $\tilde{l} : L_2 \to \mathbb{R}$.*

Доказательство Пусть $|l(f)| \leq M \ \forall \ f \in S \cap C_2^0$. Тогда $\forall \ f \in C_2^0, \ |l(f)| \leq M||f||$. Пусть $(f_n) \sim \varphi \in L_2$ - последовательность Коши в C^0 с нормой (**??**). Тогда $l(f_n)$ - последовательность Коши в $\mathbb{R}$, поскольку

$$|l(f_n) - l(f_m)| \leq M||f_n - f_m||.$$

Следовательно, существует $\lim l(f_n) = l(\varphi)$. □

2 Общий вид линейного функционала в $L_2 = L_2(\Omega, \mathbb{R})$.

Теорема 1 *Линейный ограниченный функционал в L_2 имеет вид $l(f) = (f, g)$.*

Дальнейшая часть лекции - доказательство этой теоремы.

Лемма 1 *Подпространство $\mathcal{L} = \{\varphi \in L_2 | \lambda(\varphi) = 0\}$ замкнуто.*

Доказательство Пусть $\varphi_n \in \mathcal{L}, \ \varphi_n \to \varphi$ в L_2. Тогда $|l(\varphi - \varphi_n)| \leq M||\varphi - \varphi_n|| \to 0$. Но $l(\varphi_n) = 0 \Rightarrow l(\varphi) = 0$ □

Лемма 2 *Каждое замкнутое подпространство L гильбертова пространства H имеет ортогональное дополнение $\mathcal{L}^{\perp}$.*

Доказательство Нам нужно доказать, что для любого $\xi \in H$ существует единственное разложение

$$\xi = \eta + \xi,\ \eta \in \mathcal{L},\ \xi \in \mathcal{L}^{\perp}$$

В качестве ζ возьмем вектор минимальной нормы с началом в ξ и концом на $\mathcal{L}$, равносильно, найдем $\eta \in \mathcal{L}$, для которого $||\xi - \eta||$ минимальна. Докажем существование, единственность такого вектора, и перпендикулярность ζ к $\mathcal{L}$.

Единственность. Пусть существуют два кратчайших вектора с началом в точке ξ и концом на $\mathcal{L}$. Проведем плоскость через конец ξ, содержащую эти два вектора. Получим два перпендикуляра из точки на прямую, существование которых запрещено планиметрией.

Существование. Пусть $s = \inf_{\eta\in\mathcal{L}} ||\xi - \eta||$. Рассмотрим последовательность (η_n) : $||\xi - \eta_n|| \to s$. Докажем, что (η_n) - последовательность Коши. Положим $\zeta_n = \xi - \eta_n$. Пусть ζ_n и ζ_m ε-близки к s. Проведем трехмерное пространство через векторы ξ, η_m, η_n и опустим перпендикуляр ζ' на плоскость η_m, η_n из точки ξ. Имеем: $s \le ||\zeta'|| \le ||\zeta_j||,\ j = m, n$. Следовательно, $0 < ||\zeta_j|| - ||\zeta'|| < \varepsilon$. По теореме Пифагора $||\zeta_j - \zeta'||^2 = ||\zeta_j||^2 - ||\zeta'||^2 < \varepsilon \cdot C$, где $C = 2||\xi||$. Поэтому $||\zeta_j - \zeta'|| < \sqrt{C\varepsilon}$, где C не зависит от m, n. Но $||\eta_j - \eta'|| = ||\zeta_j - \zeta'||$. Следовательно, $||\eta_j - \eta'|| < \sqrt{C\varepsilon}$. Наконец, по неравенству треугольника,

$$||\eta_m - \eta_n|| < 2\sqrt{C\varepsilon}.$$

Тем самым, $\eta_n \to \eta,\ \xi - \eta = \zeta,\ ||\zeta|| = \min_{\eta\in\mathcal{L}} ||\xi - \eta||$, и η и есть требуемый вектор.

Перпендикулярность ζ к L. Возьмем $\zeta_\varepsilon = \zeta + \varepsilon\eta$. Имеем: $\eta \in \mathcal{L},\ (\zeta, \zeta) > (\zeta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$. Следовательно, функция

$$(\zeta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) = (\zeta, \zeta) + \varepsilon(\zeta, \eta) + \varepsilon^2(\eta, \eta)$$

удовлетворяет условию $\eta'_\varepsilon(0) = (\zeta, \eta) = 0$, поскольку 0 - минимум n_ε.

Лемма доказана.

□

Возвращаясь к доказательству теоремы, возьмем единичный вектор $n \perp \mathcal{L} = \{l = 0\}$.

Положим $\lambda = l(n),\ \eta = \lambda n$. Тогда $l(\varepsilon) = (\xi, \eta)$, см. евклидов случай. Теорема 1 доказана.

3 От Пифагора до Планшереля: различные формулировки теоремы Пифагора

a) на плоскости: $a^2 + b^2 = c^2$;

b) в евклидовом пространстве: $|\xi|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

c) для рядов Фурье: $f \in C[-\pi, \pi]$ или $(L_2[-\pi, \pi])$ $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

$$(1) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 2\pi \Sigma |c_k|^2;$$

d) для преобразований Фурье: $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx$

$$(2) \qquad ||\hat{f}|| = ||f||$$

Формулы (1) и (2) $\sim$ называются равенствами Планшереля.

4 Теорема Рисса в вещественном гильбертовом пространстве

Определение 4 *Система (e_n) полна в H, если ее линейные комбинации плотны в H.*

Теорема 2 *Пусть H – гильбертово пространство, $(e_n) = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ – полная ортонормированная система в H. Тогда любой элемент $x \in H$ разлагается в ряд $x = \Sigma c_k e_k$, где $c_k = (x, e_k)$; частные суммы этого ряда сходятся к x в метрике H.*

Доказательство Для любого n справедливо соотношение: $r_n = x - \Sigma_1^n c_k e_k \perp e_k$ при $k = 1, \dots, n$. Отсюда следует: $||x||^2 = ||r_n||^2 + \Sigma c_k^2 \Rightarrow \Sigma c_k^2 \leq ||x||^2$ – неравенство Парсеваля.

Пространство H полно. Последовательность

$$x_n = \Sigma_1^n c_k e_k$$

фундаментальна. Следовательно, она сходится. Пусть $y = \lim x_n$.

Утверждение 1 *$y = x$.*

Пусть нет. Тогда $z = x - y \neq 0$, $z \perp e_k \forall k$. Но линейные комбинации e_k плотны в H. Приблизим z последовательностью таких комбинаций:

$$w_n = \Sigma_1^n a_{k,n} e_k \to z;$$

суммирование ведется по k, и число слагаемых равно n. Тогда

$$0 = (z, \Sigma a_{k,n} e_k) = (z, w_n) \to (z, z).$$

Следовательно, $z = 0$. Итак,

$$x = y = \Sigma c_k e_k.$$

$\square$

Следствие 1 $||x||^2 = \Sigma c_k^2$ – *формула Планшреля*

5 Самый знаменитый ортогональный базис в $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$

$$(SC) \qquad 1; \cos nx; \sin nx$$

Попарная ортогональность: будет проверена потом. Полнота следует из теоремы Вейерштрасса:

Теорема 3 *Любая непрерывная функция на $[-\pi, \pi]$ с одинаковыми значениями на концах может быть (равномерно) приближена тригонометрическими многочленами.*

Непрерывные функции плотны в L_2 на отрезке.

Задача 1 *Непрерывные функции с одинаковыми значениями на концах плотны в L_2 на отрезке.*

Следовательно, система S полна в L_2.

Разложение по ортогональной ненормированной системе: (e_k) попарно ортогональны, но $(e_k, e_k) \neq 1$.

$$f = \Sigma c_k e_k, \ (x, e_k) = c_k(e_k, e_k) \Rightarrow c_k = \frac{1}{(e_k, e_k)}(x, e_k).$$

Приложение к разложению по системе CS:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно,

$$f(x) = a_0 + \Sigma_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx + a_k \cos kx$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \ a_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos kx dx, \ b_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin kx dx.$$

6 Еще более знаменитый базис в $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

Положим для краткости: $[\pi,\pi]=\sigma$ и рассмотрим пространство $L_2(\sigma,\mathbb{C})$, которое является пополнением пространства непрерывных функций $f:\sigma\to\mathbb{C}$ по норме, заданной скалярным произведением

$$< f,g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx. \tag{1}$$

Базис $E: e^{ikx},\ k\in\mathbb{Z}$.

Ортогональность:

$$I=\left\langle e^{inx},e^{imx}\right\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx=\begin{cases}2\pi,\ n=m\\ 0,\ n\neq m\end{cases}$$

Проверка:

$$n\neq m: I=\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)x}|_{-\pi}^{\pi}=0$$

Следовательно,

$$f(x)=c_k e^{ikx},\ c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \tag{2}$$

Ортогональность базиса SC следует из ортогональности базиса E и формулы Эйлера:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

Следовательно,

$$e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx$$

Полнота системы E следует из полноты системы CS и формулы Эйлера.