Задачи к 30.01.

(1) К какому наиболее простому виду можно привести матрицу линейного оператора, удовлетворяющего уравнению $x^2 = 1$? (Мы видели, что типичный пример такого рода это зеркальная симметрия относительно некоторого подпространства, т.е. пространство V представляется в виде прямой суммы $V = U \oplus W$ и тогда оператор f, переводящий вектор $v = u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) в вектор $f(v) = u - w$, удовлетворяет этому уравнению.) Ответ зависит от характеристики поля, случай характеристики 2 сложнее.

(2) Доказать, что группа обратимых элементов $\mathbb{Z}^*_{p^n}$ (p — простое число) циклическая при $p \neq 2$ и произведение циклической на группу порядка 2 при $p = 2$.

(3) Пусть p – простое число, $F_n = \mathbb{F}_p^{\mathbb{F}_p^n}$ — множество функций от n переменных, т.е. функций $f : \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p$. Докажите, что F_n это p^n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{F}_p$. Рассмотрим линейное отображение $\sigma : F_n \to F_n$, сопоставляющее каждой функции $f \in F_n$ новую функцию $\sigma(f) : \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p$, задаваемую формулой

$$\sigma(f)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{0 \le k_1 \le p-1 \\ \dots \\ 0 \le k_n \le p-1}} f(k_1, \dots, k_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

а) Докажите, что при $p = 2$ σ является инволюцией (т.е. $\sigma^2 = \mathrm{Id}$).

*б) Сколько функций от n переменных удовлетворяют условию $\sigma(f) = f$? ($p = 2$)

*в) Что можно сказать об отображении σ при $p > 2$?

(4) Сколько k-мерных граней у n-мерного куба?

(5) Если булевы векторы (т.е. элементы $\{0,1\}^n$) занумеровать в лексикографическом порядке, то булев вектор $\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ($\alpha_i \in \{0,1\}$) получит номер $D_\alpha = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} 2 + \alpha_n$, т.е. α является двоичной записью натурального числа D_α. Можно ли в терминах натуральных чисел D_α и D_β переформулировать следующие геометрические взаимоотношения между α и β как вершинами n-мерного куба?

а) вершины α и β соединены ребром;

б) вершины α и β центрально симметричны относительно центра куба;

в) $\alpha \leq \beta$. (Напомним, что на вершинах булева куба мы определили отношение частичного порядка: $\alpha \leq \beta$, если при всех i $\alpha_i \leq \beta_i$.)

(6) Обосновать следующий алгоритм вычисления многочлена Жегалкина булевой функции от n переменных. Задаем булеву функцию вектором из $N = 2^n$ ее значений, соответствующих лексикографическому упорядочению переменных, и записываем этот вектор в первый столбец матрицы A размером $N \times N$. Вычисляем все элементы матрицы A, лежащие не ниже побочной диагонали, по столбцам. Элементы столбца с номером $k+1$ вычисляются по элементам k-ого столбца по формуле $a_{i,k+1} = a_{i,k} + a_{i+1,k}$. После заполнения всех столбцов в первой строке матрицы A оказываются коэффициенты многочлена Жегалкина.

(7) (осталась с прошлого раза) Доказать, что любой элемент конечномерной алгебры (ассоциативной, с единицей) является либо обратим, либо является делителем нуля. (Мы в прошлый раз доказали аналогичную дихотомию для конечного кольца.)