Дополнительные главы алгебры. Листок к зачету-автомату в 3 модуле.

Сдача всех задач “без звездочки” из этого листка дает оценку 10 баллов (автоматом) за все зачетные мероприятия по курсу “Дополнительные главы алгебры” в 3 модуле. Любой пункт со звездочкой заменяет любые 2 пункта без звездочки. Дедлайн по этому листку 22 марта.

Задача 1. Пусть $p \in \mathbb{Z}$ – простое число. Докажите, что многочлен **(а)** $\frac{x^{p^2}-1}{x^p-1}$; **(б)** $x^p - x - 1$ неприводим над полем рациональных чисел.

Задача 2. Пусть $P(x), Q(x) \in K[x]$ – многочлены над полем K, степеней m, k соответственно. Напишите формулы для результанта многочленов $P(x), Q(x)$ в виде определителей некоторых операторов в векторных пространствами **(а)** $K[x]/(P(x))$ и $K[x]/(Q(x))$; **(б)** $K[x]/(P(x)Q(x))$.

Задача 3*. **(а)** Покажите, что $\mathbb{C}^3/S_3$, т.е. пространство неупорядоченных троек комплексных чисел (с естественной топологией) гомеоморфно C^3. *Указание:* неупорядоченная тройка чисел есть тройка корней кубического многочлена.

(б) Покажите, что фундаментальная группа многообразия $\mathbb{C}^2 \backslash \{z^2 = w^3\}$ есть группа B_3 кос из трех нитей. *Указание:* вспомните формулу для дискриминанта кубического многочлена.

(в) Покажите, что узел “трилистник” является нетривиальным узлом. *Указание:* пользуясь предыдущим пунктом, вычислите фундаментальную группу дополнения этого узла в S^3.

Задача 4. Покажите, что через n точек на плоскости $\mathbb{CP}^2$ в общем положении проходит единственная кривая степени k, если

(а) $n = 5,\ k = 2$;
(б) $n = 9,\ k = 3$.
(в) Расшифруйте, что конкретно означает “в общем положении” для пункта (а);
(г) для пункта (б).

Задача 5. **(а)** Опишите все кубические кривые, проходящие через 9 точек плоскости, каждая координата которых равна 0 или ± 1. (Внимание, эта девятка точек не общего положения!)

(б) Плоская кубическая кривая проходит через 8 из 9 точек из пункта (а). Докажите, что эта кривая проходит и через 9-ю точку.

Задача 6. Для конечнопорожденной абелевой группы A найдите (в терминах разложения на примарные) **(а)** $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$; **(б)** $A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; **(в)** $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$; **(г)**$\mathrm{A}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$.

Задача 7. Опишите все конечнопорожденные модули над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.

Задача 8. Опишите с точностью до изоморфизма пары A, φ, где A – конечнопорожденная абелева группа, а $\varphi : A \to A$ – такой автоморфизм группы A, что **(а)** $\varphi(\varphi(a)) + a = 0$ для любого $a \in A$; **(б)** $\varphi(\varphi(a)) + \varphi(a) + a = 0$. *Указание:* это задача о классификации модулей над некоторыми кольцами.

Задача 9. Пусть $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ – кубический многочлен.

(а) Покажите, что $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - P(x))$ – целостное кольцо.

(б) Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - P(x))$ в его поле частных в зависимости от многочлена $P(x)$.

Задача 10. Пусть целостное кольцо R целозамкнуто в своем поле частных. Покажите, что то же верно и для кольца $R[x]$.

Задача 11. **(а)** Найдите кольцо целых и дискриинант поля $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ в зависимости от $n \in \mathbb{Z}$.

(б)* Те же вопросы для поля $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{5}]$.

Задача 12*. Пусть p – простое число. Покажите, что кольцо целых кругового поля $\mathbb{Q}[x]/(x^{p-1} + \ldots + x + 1)$ порождено корнями степени p из единицы.

Задача 13. **(а)** Докажите, что всякий кососимметрический многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$Q(x_1, \ldots, x_n) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j),$$

где $Q(x_1, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен.

(б) Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n)$ – диаграмма Юнга высоты не более n. Симметрические функции Шура определяются следующим образом:

$$s_\lambda := \frac{det\begin{pmatrix} x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & x_3^{\lambda_n} & \ldots & x_n^{\lambda_n} \\ x_1^{\lambda_{n-1}+1} & x_2^{\lambda_{n-1}+1} & x_3^{\lambda_{n-1}+1} & \ldots & x_n^{\lambda_{n-1}+1} \\ x_1^{\lambda_{n-2}+2} & x_2^{\lambda_{n-2}+2} & x_3^{\lambda_{n-2}+2} & \ldots & x_n^{\lambda_{n-2}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & x_3^{\lambda_1+n-1} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-1} \end{pmatrix}}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)}.$$

Покажите, что функции Шура образуют базис в пространстве симметрических многочленов от n переменных.

Задача 14. **(а)** Покажите, что $C[x_1, \ldots, x_n]$ является конечнопорожденным модулем над кольцом симметрических многочленов.

(б) Покажите, что это свободный модуль с $n!$ образующими.

Задача 15. **(а)** Циклическая группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ действует на алгебре $\mathbb{C}[x, y]$ заменами $x \mapsto \xi x,\ y \mapsto \xi^{-1} y$, где $\xi^n = 1$. Задайте кольцо инвариантов этой группы образующими и соотношениями.

(б) Тот же вопрос для действия группы диэдра D_n, порожденной заменами, описанными выше, и перестановкой $x \mapsto y,\ y \mapsto x$.

(в) тот же вопрос для подгруппы в $SL_2(\mathbb{C})$, являющейся центральным расширением группы диэдра D_n (порожденной заменами из пункта (а) и $x \mapsto y,\ y \mapsto -x$).

Задача 16. Найдите какие-нибудь образующие идеала J в кольце симметрических многочленов от переменных x_1, x_2, x_3, если

(а) J состоит из функций, обращающихся в нуль, если $x_1 = x_2$;

(б) J состоит из функций, обращающихся в нуль, если $x_1 = x_2 = x_3$.

Задача 17. **(а)** Покажите, что любой полином от коэффициентов матрицы над полем $\mathbb{C}$, инвариантный относительно сопряжений, является полиномом от коэффициентов характеристического многочлена.

(б) Покажите, что он является полиномиальной функцией от следов степеней матрицы.

(в) Верно ли это над полем положительной характеристики?

Задача 18. **(а)** Докажите, что линейный оператор A над полем характеристики 0 нильпотентен тогда и только тогда, когда $TrA^k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

(б) Верно ли это над полем положительной характеристики?

Задача 19. Покажите, что многочлены $Tr\Lambda^k A$, где $k = 1, 2, \ldots, n$ образуют регулярную последовательность в $\mathbb{C}[Mat_n]$.

Задача 20. Найдите ряд Пуанкаре (он же ряд Гильберта) кольца регулярных функций на множестве комплексных нильпотентных матриц **(а)** 2×2; **(б)** произвольного размера.