

### Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 3.

**Задача 1.** Вычислите результат следующих многочленов: (а)  $x^3 - x^2 + 2x + 1$ ,  $2x^2 - x - 1$ ; (б)  $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ ,  $x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$ ; (в)\* круговых многочленов  $\Phi_n$ ,  $\Phi_k$ .

**Задача 2.** Найдите все точки пересечения кривых, заданных уравнениями

(а)  $x^2y + 3xy + 2y + 3 = 0$  и  $2xy - 2x + 2y + 3 = 0$ ;

(б)  $x^2 - 2xy + xy^3 = 0$  и  $x^2 + y^2 - 2 = 0$ ;

(в)  $y^2 + (x - 4)y + x^2 - 2x + 3 = 0$  и  $y^3 - 5y^2 + (x + 7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ .

**Задача 3.** В скольких точках могут пересекаться две (а) квадратики; (б) кривые порядка 2 и 3 в  $\mathbb{C}P^2$ ?

**Задача 4.** Дискриминантом многочлена  $A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n \prod_{i=1}^n (x - x_i)$  называется  $D(A) := a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$ .

(а) Покажите, что  $D(A) = \pm a_n^{-1} R(A, A') \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n]$ .

(б) Покажите, что  $D(AB) = D(A)D(B)R(A, B)^2$ .

**Задача 5.** Вычислите дискриминант многочлена (а)  $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ ; (б)  $1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ ; (в)\*  $\Phi_n$ .

**Задача 6.** При каких значениях  $\lambda$  многочлен  $x^4 - 4x + \lambda$  имеет кратный корень?